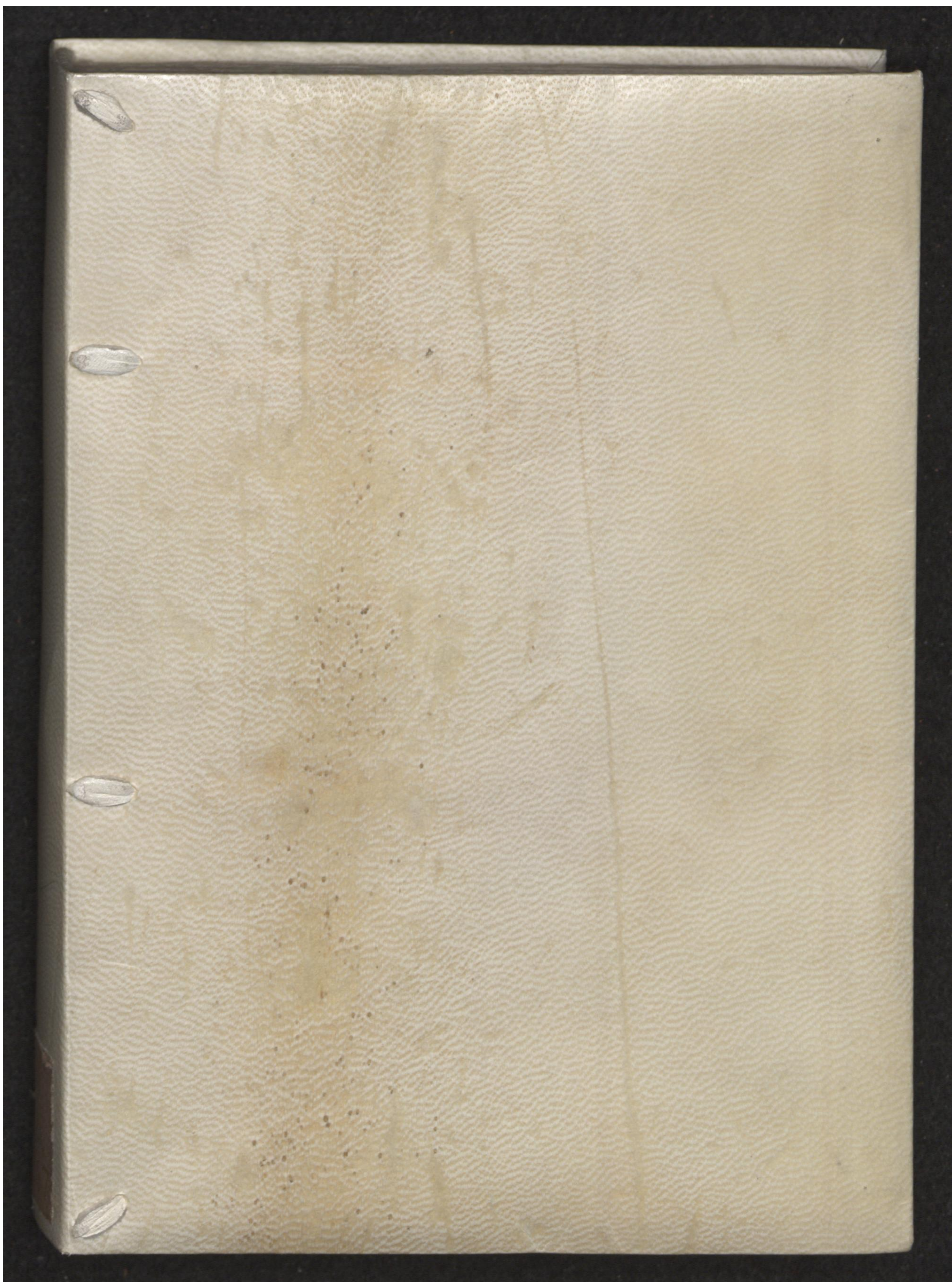
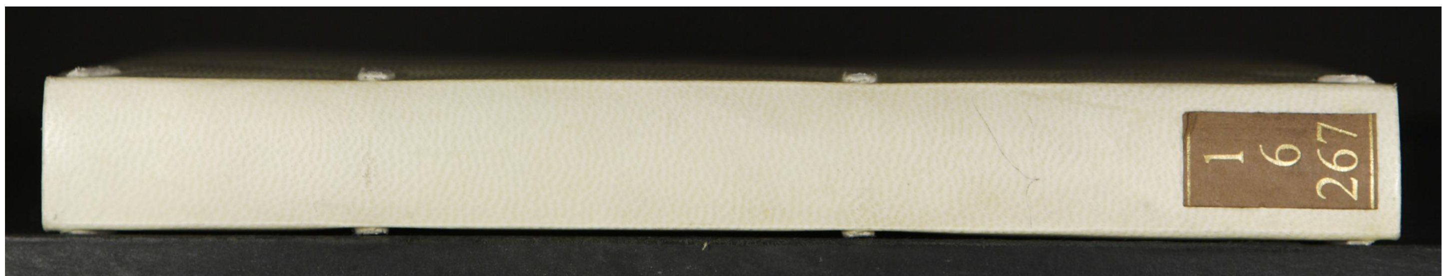
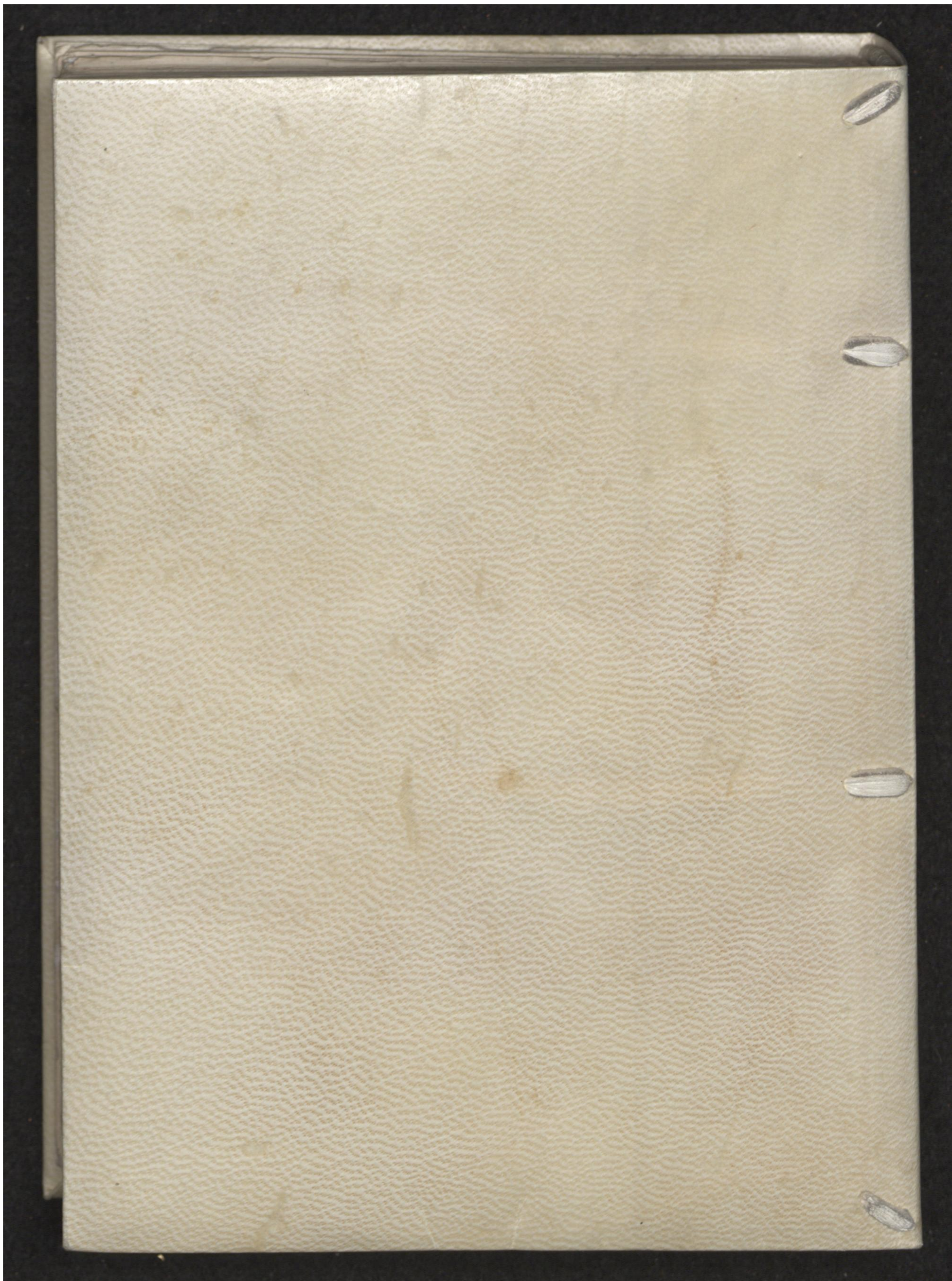



1
6
267







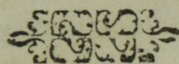
1-6-267



Vrbinatis

# FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS

## LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.



CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.

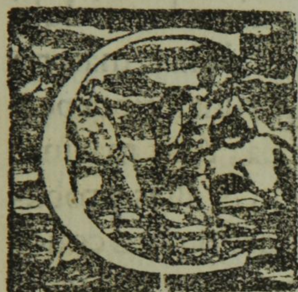
BONONIAE,

Ex Officina Alexandri Benacii.

M D LXV.



# ALEXANDRO FARNESIO CARDINALI AMPLISSIMO, ET OPTIMO.



VM multæ res in mathematicis disciplinis nequaquam satis adhuc explicatæ sint, tum perdifficilis, & perobscura quæstio est de centro grauitatis corporum solidorum; quæ, & ad cognoscendum pulcherrima est, & ad multa, quæ à mathematicis proponuntur, præclare intelligenda maximum affert adiumentum. de qua neminem ex mathematicis, neque nostra, neque patrum nostrorum memoria scriptum reliquisse scimus. & quamuis in earum monumentis literarum nõ nulla reperiantur, ex quibus in hanc sententiam adduci possumus, vt existimemus hanc rem ab ijsdẽ vberrime tractatam esse; tamen nescio quo fato adhuc in eiusmodi librorum ignoratione versamur. Archimedes quidem mathematicorũ princeps in libello, cuius inscriptio est, κέντρα βάρων ἐπιπέδων, de centro planorum copiosissime, atque acutissime conscripsit: & in eo explicando summã ingenii, & scientiæ gloriã est cõsecutus. Sed de cognitione cẽtri grauitatis corporũ solidorũ nulla in eius libris litera inuenitur. non multos abhinc annos MARCELLVS II. PONT. MAX.

cum adhuc Cardinalis eſſet, mihi, quæ ſua erat humanitas, libros eiuſdem Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua, latine redditos dono dedit. hos cum ego, ut aliorum ſtudia incitarem, emendãdos, & cõmentariis illuſtrandos ſuſcepiſſem, animaduerti dubitari non poſſe, quin Archimedes vel de hac materia ſcripſiſſet, vel aliorum mathematicorum ſcripta perlegiſſet. nam in iis tum alia nonnulla, tum maxime illam propoſitionem, ut euidentem, & aliàs probatam aſſumit, Centrũ grauitatis in portionibus conoidis rectanguli axem ita diuidere, vt pars, quæ ad verticem terminatur, alterius partis, quæ ad baſim dupla ſit. Verum hæc ad eam partem mathematicarum diſciplinarum præcipue refertur, in qua de centro grauitatis corporum ſolidorum tractatur. non eſt autem conſentaneum Archimedem illum admirabilem virum hanc propoſitionem ſibi argumentis confirmandam exiſtimaturum non fuiſſe, niſi eam vel aliis in locis probauiſſet, vel ab aliis probatam eſſe comperiſſet. quamobrem nequid in iis libris intelligendis deſiderari poſſet, ſtatui hanc etiam partem vel à veteribus prætermiſſam, vel tractatam quidem, ſed in tenebris iacentem, non intactam relinquere; atque ex aſsidua mathematicorum, præſertim Archimedis lectione, quæ mihi in mentem venerunt, ea in medium afferre; ut centri grauitatis corporum ſolidorum, ſi non perfectam, at certe aliquam noti-

tiam haberemus. Quem meum laborem nō mathematicis ſolum, verum iis etiam, qui naturæ obſcuritate delectantur, nō iniucundam fore ſperaui: multa enim προβλήματα cognitione digniſsima, quæ ad vtrãque ſcientiam attinent, ſeſe legentibus obtuliſſent. neque id vlli mirandum videri debet. vt enim in corporibus noſtris omnia membra, ex quibus certa quædam officia naſcuntur, diuino quodam ordine inter ſe implicata, & colligata ſunt: in iisq; admirabilis illa conſpiratio, quam σύμπνοιαν græci vocant, eluceſcit, ita tres illæ Philoſophiæ (ut Ariſtotelis verbo vtar) quæ veritatem ſolam propoſitam habent, licet quibuſdam quaſi finibus ſuis regantur: tamen earũ vnaquæque per ſe ipſam quodammodo imperfecta eſt: neque altera ſine alterius auxilio plene comprehendi poteſt. complures præterea mathematicorum nodi ante hac explicatu difficillimi nullo negotio expediti eſſent: atque (ut vno verbo complectar) niſi mea valde amo, tractationem hanc meam ſtudioſis non mediocrem vtilitatem, & magnam voluptatem allaturam eſſe mihi perſuaſi. cum autem ad hoc ſcribendum aggreſſus eſsem, allatus eſt ad me liber Franciſci Maurolici Meſſanenſis, in quo vir ille doctiſsimus, & in iis diſciplinis exercitatiſsimus affirmabat ſe de centro grauitatis corporum ſolidorum conſcripſiſſe. cum hoc intellexiſſem, ſuſtinui me pauliſper: tacitus'que expectaui, dum opus cla-

rissimi uiri, quem semper honoris caussa nomino, in lucem proferretur: mihi enim exploratissimum erat: Franciscum Maurolicum multo doctius, & exquisitius hoc disciplinarum genus scriptis suis traditurum. sed cum id tardius fieret, hoc est, ut ego interpretor, diligentius, mihi diutius hac scriptione non supersedendum esse duxi, praesertim cum iam libri Archimedis de iis, quae uehuntur in aqua, opera mea illustrati typis excudēdi essent. nec me alia caussa impulisset, ut de centro grauitatis corporum solidorum scriberem, nisi ut hac etiam ratione lux eis quàm maxime fieri posset afferretur. atq; id eò mihi faciendum existimaui, quòd in spem ueniebam fore, ut cum ego ex omnibus mathematicis primus, hanc materiam explicandam suscepissem; si quid errati forte à me commissum esset, boni uiri potius id meae de studiosis hominibus bene merēdi cupiditati, quàm arrogantiae ascriberent. restabat ut considerarem, cui potissimum ex principibus uiris contemplationem hanc, nunc primum memoriae, ac literis proditam dedicarem. harum mearum cogitationum summa facta, existimaui nemini conuenientius de centro grauitatis corporum opus dicari oportere, quàm ALEXANDRO FARNESIO grauissimo, ac prudentissimo Cardinali, quo in uiro summa fortuna semper cū summa uirtute certauit. quid enim maxime in te admirari debeant homines, obscurum est; usum'ne re-

rum, qui pueritiæ tempus extremum principium habuisti, & imperiorũ, & ad Reges, & Imperatores honorificentissimarum legationum; an excellentiam in omni genere literarum, qui vix adolescẽtulus, quæ homines iam confirmata ætate summo studio, diuturnisq; laboribus didicerunt, scientia, & cognitione comprehendisti: an consilium, & sapientiam in regendis, & gubernãdis Ciuitatibus, cuius grauissimæ sententiæ in sanctissimo Reip. Christianæ consilio dictæ, potius diuina oracula, quàm sententiæ habitæ sunt, & habentur. prætermitto liberalitatem, & munificentiam tuam, quam in studiosissimo quoque honestando quotidie magis ostendis, ne videar auribus tuis potius, quàm veritati seruire. quamuis à te in tot præclaros viros tanta beneficia collata sunt, & conferũtur, vt omnibus testatum sit, nihil tibi esse charius, nihil iucundius, quàm eximia tua liberalitate homines ad amplexandam virtutem, licet currentes incitare. nihil dico de ceteris virtutibus tuis, quæ tantæ sunt, quantæ ne cogitatione quidem comprehendi possunt. Quamobrem hac præcipue de caussa te huius meæ lucubrationis patronum esse volui, quam ea, qua soles, humanitate accipies. te enim semper ob diuinas virtutes tuas colui, & obseruaui: nihilq; mihi fuit optatius; quàm tibi perspectum esse meum erga te animum; singularemq; obseruantiam. cœlum igitur digito attingam, si post grauissimas oc-

cupationes tuas legendo Federici tui libro aliquid impertiri temporis non grauaberis: eumq́; in iis, qui tibi semper addicti erunt, numerare. Vale.

Federicus Commandinus.

# FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

## DIFFINITIONES.



ENTRVM grauitatis, Pappus 1
Alexandrinus in octauo mathematicarum collectionum libro ita diffiniuit.

λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντὸς, ἀφ' οὗ κατ' ἐποίνιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἠμερεῖ φερόμενον, καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν, οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ. hoc est,

Dicimus autem centrum grauitatis uniuſcuiuſque corporis punctum quoddam intra poſitum, à quo ſi graue appenſum mente concipiatur, dum fertur quieſcit; & ſeruat eam, quam in principio habebat poſitionem: neque in ipſa latione circumuertitur.

Poſſumus etiam hoc modo diffinire.

Centrum grauitatis uniuſcuiuſque ſolidæ figuræ eſt punctum illud intra poſitum, circa quod undique partes æqualium momentorum conſiſtunt. ſi enim per tale centrum ducatur planum figuram quomodocunque ſecans ſemper in par-

tes æqueponderantes ipſam diuidet.

2 Priſmatis, cylindri, & portionis cylindri axem appello rectam lineam, quæ oppoſitorum planorum centra grauitatis coniungit.

3 Pyramidis, coni, & portionis coni axem dico lineam, quæ à uertice ad centrum grauitatis baſis perducitur.

4 Si pyramis, conus, portio coni, uel conoidis ſecetur plano baſi æquidiſtante, pars, quæ eſt ad baſim, fruſtum pyramidis, coni, portionis coni, uel conoidis dicetur; quorum plana æquidiſtantia, quæ opponuntur ſimilia ſunt, & inæqualia: axes uero ſunt axium figurarum partes, quæ in ipſis comprehenduntur.

## PETITIONES.

1 Solidarum figurarum ſimilium centra grauitatis ſimiliter ſunt poſita.

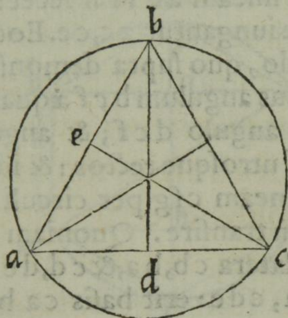
2 Solidis figuris ſimilibus, & æqualibus inter ſe aptatis, centra quoque grauitatis ipſarum inter ſe aptata erunt.

## THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Omnis figuræ rectilineæ in circulo deſcriptæ, quæ æqualibus lateribus, & angulis contine-

tur, centrum grauitatis est idem, quod circuli centrum.

Sit primo triangulum æquilaterum a b c in circulo descriptum: & diuisa a c bifariam in d, ducatur b d. erit in linea b d centrum grauitatis triãguli a b c, ex tertia decima primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum. Et quoniam linea a b est æqualis lineæ b c; & a d ipsi d c; estq; b d utrique communis: triangulum a b d æquale erit triangulo c b d: & anguli angulis æquales, qui æqualibus lateribus subtenduntur. ergo anguli ad d utriq; recti sunt. quòd cum linea b d secet a c bifariam, & ad angulos rectos; in ipsa b d est centrum circuli. quare in eadem b d linea erit centrum grauitatis trianguli, & circuli centrum. Similiter diuisa a b bifariam in e, & ducta c e, ostendetur in ipsa utrũque centrum contineri. ergo ea erunt in puncto, in quo lineæ b d, c e conueniunt. trianguli igitur a b c centrum grauitatis est idem, quod circuli centrum.




8. primi.

13. primi.

corol. primæ tertii

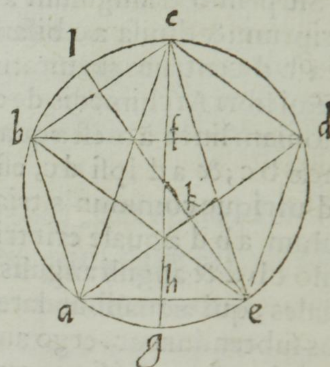
Sit quadratum a b c d in circulo descriptum: & ducantur a c, b d, quæ conueniant in e. ergo punctum e est centrum grauitatis quadrati, ex decima eiusdem libri Archimedis. Sed cum omnes anguli ad a b c d recti sint; erit a b c semicirculus: itemq; b c d: & propterea lineæ a c, b d diametri circuli:




31. tertii.

quæ quidem in centro conueniunt. idem igitur eſt centrum
grauitatis quadrati, & circuli centrum.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum in circu-
lo deſcriptum a b c d e: & iun-
cta b d, biſariamq; in f diuiſa,
ducatur c f, & producatur ad
circuli circumferentiam in g;
quæ lineam a e in h ſecet: de-
inde iungantur a c, c e. Eodem
modo, quo ſupra demonſtra-
bimus angulum b c f æqualem
eſſe angulo d c f; & angulos
ad f utroſque rectos: & idcir-
co lineam c f g per circuli cen
trum tranſire. Quoniam igi-



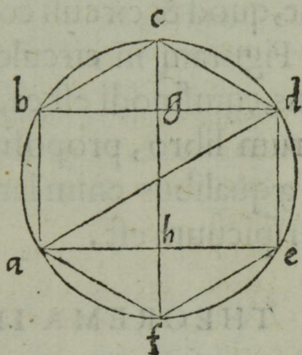

tur latera c b, b a, & c d, d e æqualia ſunt; & æquales anguli
4. Primi. c b a, c d e: erit baſis c a baſi c e, & angulus b c a angulo
d c e æqualis. ergo & reliquus a c h, reliquo e c h. eſt au-
tem c h utrique triangulo a c h, e c h communis. quare
baſis a h æqualis eſt baſi h e: & anguli, qui ad h recti: ſuntq;
28. primi. recti, qui ad f. ergo lineæ a e, b d inter ſe ſe æquidiſtant.
Itaque cum trapezij a b d e latera b d, a e æquidiſtantia à li
nea f h biſariam diuidantur; centrum grauitatis ipſius erit
13. Archimedis. in linea f h, ex ultima eiuſdem libri Archimedis. Sed trian-
guli b c d centrum grauitatis eſt in linea c f. ergo in eadem
linea c h eſt centrum grauitatis trapezij a b d e, & trian-
guli b c d: hoc eſt pentagoni ipſius centrum: & centrum
circuli. Rurſus ſi iuncta a d, biſariamq; ſecta in k, duca-
tur e k l: demonſtrabimus in ipſa utrumque centrum in
eſſe. Sequitur ergo, ut punctum, in quo lineæ c g, e l con-
ueniunt, idem ſit centrum circuli, & centrum grauitatis
pentagoni.

Sit hexagonum a b c d e f æquilaterum, & æquiangulum
in circulo deſignatum: iunganturq; b d, a e: & biſariam ſe-

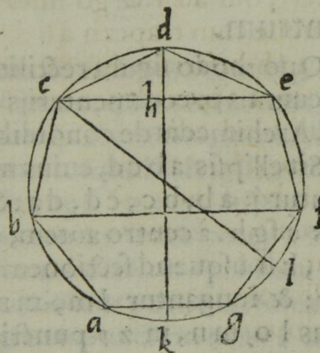
cta

cta b d in g puncto, ducatur c g; & protrahatur ad circuli usque circumferentiam; quæ secet a e in h. Similiter concludemus c g per centrum circuli transire: & bifariam secare lineam a e; itemq; lineas b d, a e inter se æquidistantes esse. Cum igitur c g per centrum circuli transeat; & ad punctũ f perueniat necesse est: quòd c d e f sit dimidium circumferentiæ circuli. Quare in eadem diametro c f erunt centra grauitatis triangulorum b c d, a f e, & quadrilateri a b d e, ex quibus constat hexagonum a b c d e f. perspicuum est igitur in ipsa c f esse circuli centrum, & centrum grauitatis hexagoni. Rursus ducta altera diametro a d, eisdem rationibus ostendemus in ipsa utrumque cẽtrum inesse. Centrum ergo grauitatis hexagoni, & centrum circuli idem erit.

13. Archimedis. 9. eiusdẽ.




Sit heptagonum a b c d e f g æquilaterum atque æquiangulum in circulo descriptum: & iungantur c e, b f, a g: diuisa autem c e bifariam in pũcto h: & iuncta d h producatur in k. non aliter demonstrabimus in linea d k esse centrum circuli, & centrum grauitatis trianguli c d e, & trapeziorum b c e f, a b f g, hoc est centrum totius heptagoni: & rursus eadem centra in alia diametro c l similiter ducta contineri. Quare & centrum grauitatis heptagoni, & centrum circuli in idem punctum conueniunt. Eodem mo



do in reliquis figuris æquilateris, & æquiangulis, quæ in circulo describuntur, probabimus cẽtrum grauitatis earum, & centrum circuli idem esse. quod quidem demonstrare oportebat.

Ex quibus apparet cuiuslibet figuræ rectilineæ in circulo plane descriptæ centrum grauitatis idẽ esse, quod & circuli centrum.

γνωρίμως Figuram in circulo plane descriptam appellamus, cuiusmodi est ea, quæ in duodecimo elementorum libro, propositione secunda describitur. ex æqualibus enim lateribus, & angulis constare perspicuum est.

## THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Omnis figuræ rectilineæ in ellipsi plane descriptæ centrum grauitatis est idem, quod ellipsis centrum.

Quo modo figura rectilinea in ellipsi plane describatur, docuimus in commentarijs in quintam propositionem libri Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus.

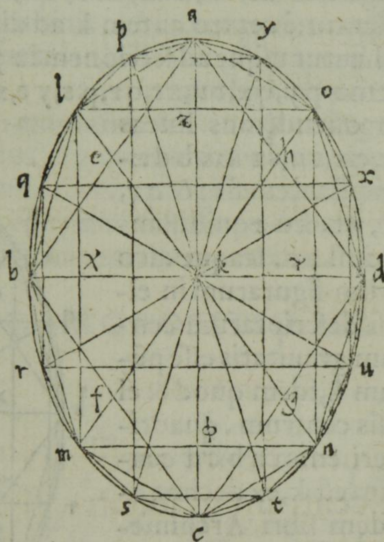
Sit ellipsis a b c d, cuius maior axis a c, minor b d: iunganturq; a b, b c, c d, d a: & bifariam diuidantur in punctis e f g h. à centro autem, quod sit k ductæ lineæ k e, k f, k g, k h usque ad sectionem in puncta l m n o protrahantur: & iungantur l m, m n, n o, o l, ita ut a c secet lineas l o, m n, in z φ punctis, & b d secet l m, o n in χ ψ. erunt l k, k n linea una, itemque linea una ipsæ m k, k o: & lineæ b a, c d æquidistabunt lineæ m o: & b c, a d ipsi k n. rursus l o, m n axi b d æquidistabunt: & l m,

o n

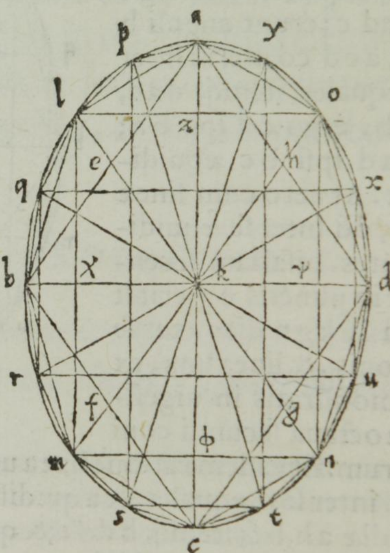
on ipſi a c. Quoniam enim triangulorum a b k, a d k, latus b k eſt æquale lateri k d, & a k utrique commune; anguliq; ad k recti. baſis a b baſi a d; & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. eadem quoque ratione oſtendetur b c æqualis c d; & a b ipſi b c. quare omnes a b, b c, c d, d a ſunt æquales. & quoniam anguli ad a æquales ſunt angulis ad c; erunt anguli b a c, a c d coalterni inter ſe æquales; itemq; d a c, a c b. ergo c d ipſi b a; & a d ipſi b c æquidiſtat. At uero cum lineæ a b, c d inter ſe æquidiſtantes biſariam ſecentur in punctis e g; erit linea l e k g n diameter ſectionis, & linea una, ex demonſtratis in uigeſima octaua ſecundi conicorum. Et eadem ratione linea una m f k h o. Sunt autē a d, b c inter ſe ſe æquales, & æquidiſtantes. quare & earum dimidiæ a h, b f; itemq; h d, f e; & quæ ipſas coniungunt rectæ lineæ æquales, & æquidiſtantes erunt. æquidiſtāt igitur b a, c d diametro m o: & pariter a d, b c ipſi l n æquidiſtare oſtendemus. Si igitur manēte diametro a c intelligatur a b c portio ellipſis ad portionem a d c moueri, cum primum b applicuerit ad d, cōgruet tota portio toti portioni, lineaq; b a lineæ a d; & b c ipſi c d congruet: punctum uero e cadet in h; f in g: & linea k e in lineam k h: & k f in k g. quare & e l in h o, et f m in g n. At ipſa l z in z o; et m φ in φ n cadet. congruet igitur triangulum l k z triangulo o k z: et

8. primi

33. primi



triangulum m k φ triangulo n k φ. ergo anguli l z k, o z k, m φ k, n φ k æquales ſunt, ac recti. quòd cum etiam recti
28. primi. ſint, qui ad k; æquidiſtabunt lineæ l o, m n axi b d. & ita demonſtrabuntur l m, o n ipſi a c æquidiſtare. Rurſus ſi iungantur a l, l b, b m, m c, c n, n d, d o, o a: & biſariam diuidantur: à centro autem k ad diuiſiones ductæ lineæ protrahantur uſque ad ſectionem in puncta p q r s t u x y: & poſtremo p y, q x, r u, s t, q r, p s, y t, x u coniungantur. Similiter oſtendemus lineas p y, q x, r u, s t axi b d æquidiſtantes eſſe: & q r, p s, y t, x u æquidiſtantes ipſi a c. Itaque dico harum figurarum in ellipſi deſcriptarum centrum grauitatis eſſe pũctum k, idem quod & ellipſis centrum. quadrilateri enim a b c d centrum eſt k, ex decima eiuſdem libri Archimedis, quippe cũ in eo omnes diametri cõueniãt. Sed in figura a l b m c n d o, quoniam trianguli



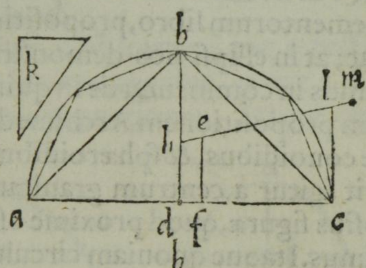

13. Archimedis. Vltima. a l b centrum grauitatis eſt in linea l e: trapeziiq; a b m o centrum in linea e k: trapezij o m c d in k g: & trianguli c n d in ipſa g n: erit magnitudinis ex his omnibus conſtantis, uidelicet totius figuræ centrum grauitatis in linea l n: & ob eandem cauſſam in linea o m. eſt enim trianguli a o d centrum in linea o h: trapezij a l n d in h k: trapezij l b c n in k f: & trianguli b m c in f m. cum ergo figuræ a l b m c n d o centrum grauitatis ſit in linea l n, & in linea o m; erit centrum ipſius punctum k, in

quo

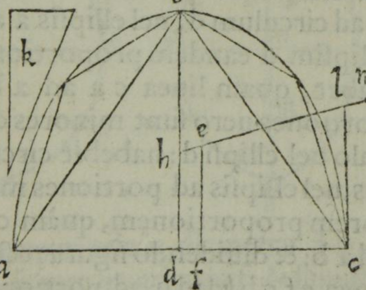
quo ſcilicet l n, o m conueniunt. Poſtremo in figura a p l q b r m s c t n u d x o y centrum grauitatis trianguli p a y, & trapezii p l o y eſt in linea a z: trapeziorum uero l q x o, q b d x centrum eſt in linea z k: & trapeziorũ b r u d, r m n u in k φ: & denique trapezii m s t n; & trianguli s c t in φ c. quare magnitudinis ex his compoſitæ centrũ in linea a c conſiſtit. Rurſus trianguli q b r, & trapezii q l m r centrum eſt in linea b χ: trapeziorum l p s m, p a c s, a y t c, y o n t in linea χ φ: trapeziiq; o x u n, & trianguli x d u centrum in ψ d. totius ergo magnitudinis centrum eſt in linea b d. ex quo ſequitur, centrum grauitatis figuræ a p l q b r m s c t n u d x o y eſſe punctũ K, lineis ſcilicet a c, b d commune, quæ omnia demonſtrare oportebat.

## THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Cuiuslibet portionis circuli, & ellipſis, quæ dimidia non ſit maior, centrum grauitatis in portionis diametro conſiſtit.




HOC eodem prorſus modo demonſtrabitur, quo in libro de centro grauitatis planorum ab Archimede demonſtratũ eſt, in portione cõtenta recta linea, & rectanguli coni ſectione grauitatis cẽtrum eſſe in diametro portionis. Et ita demonſtrari po

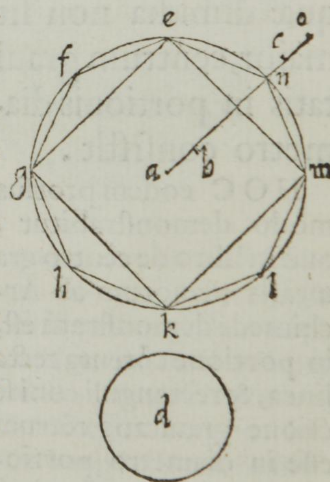


teſt in portione, quæ recta linea & obtuſianguli coni ſectione, ſeu hyperbola continetur.

## THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

IN circulo & ellipſi idem eſt figuræ & grauitatis centrum.

SIT circulus, uel ellipſis, cuius centrum a. Dico a grauitatis quoque centrum eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit b centrum grauitatis: & iuncta a b extra figuram in c producatur: quam uero proportionem habet linea c a ad a b, habeat circulus a ad alium circulum, in quo d; uel ellipſis ad aliam ellipſim: & in circulo, uel ellipſi figura rectilinea plane deſcribatur adeo, ut tandem relinquantur portiones quædam minores circulo, uel ellipſi d; quæ figura ſit e f g h k l m n. Illud uero in circulo fieri poſſe ex duodecimo elementorum libro, propoſitione ſecunda manifeſte conſtat; at in ellipſi nos demonſtrauimus in commentariis in quintam propoſitionem Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus. erit igitur a centrum grauitatis ipſius figuræ, quod proxime oſtẽdimus. Itaque quoniam circulus a ad circulum d; uel ellipſis a ad ellipſim d eandem proportionẽ habet, quam linea c a ad a b: portiones uero ſunt minores circulo uel ellipſi d: habebit circulus, uel ellipſis ad portiones maiorem proportionem, quàm c a ad a b: & diuidendo figura rectilinea e f g h k l m n ad portiones

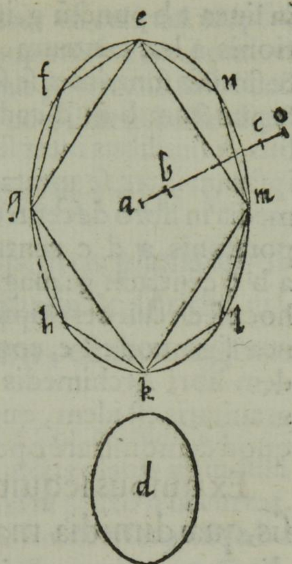



8. quinti.

19. quinti apud Cãpanum.

habebit

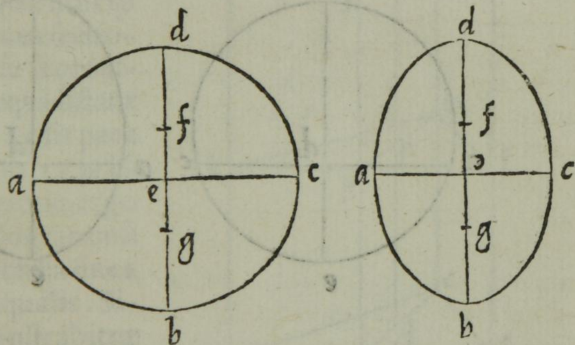
habebit maiorem proportionē, quam c b ad b a. fiat o b ad b a, ut figura rectilinea ad portiones. cum igitur à circulo, uel ellipsi, cuius grauitatis centrum est b, auferatur figura rectilinea e f g h k l m n, cuius centrum a; reliquæ magnitudinis ex portionibus compositæ centrum grauitatis erit in linea a b producta, & in puncto o, extra figuram posito. quod quidem fieri nullo modo posse perspicuum est. sequitur ergo, ut circuli & ellipsis centrum grauitatis sit punctum a, idem quod figuræ centrum.




8. Archimedis.

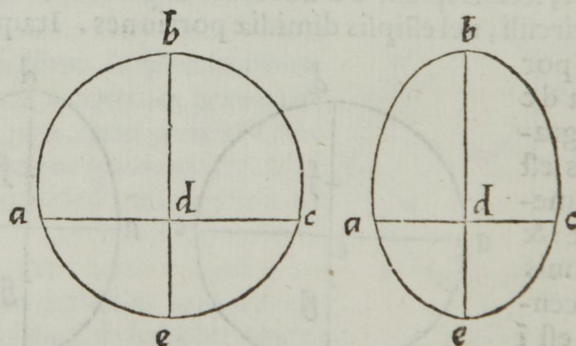
ALITER.

Sit circulus, uel ellipsis a b c d, cuius diameter d b, & centrum e: ducaturq; per e recta linea a c, secans ipsam d b ad rectos angulos. erunt a d c, a b c circuli, uel ellipsis dimidiæ portiones. Itaque quoniam portiōis a d c cētrū grauitatis est in diametro d e: & portionis a b c centrum est ī ipsa e b: totius circuli, uel ellipsis grauitatis centrum erit in diametro d b. Sit autem portionis a d c cētrum grauitatis f: & sumatur



in linea e b punctũ g, ita ut sit g e æqualis e f. erit g portionis a b c centrum. nam si hæ portiones, quæ æquales & similes sunt, inter se se aptentur, ita ut b e cadat in d e, & punctum b in d cadet, & g in f: figuris autem æqualibus, & similibus inter se aptatis, centra quoque grauitatis ipsarum inter se aptata erunt, ex quinta petitione Archimedis in libro de centro grauitatis planorum. Quare cum portionis a d c centrum grauitatis sit f: & portionis a b c centrum g: magnitudinis; quæ ex utrisque efficitur: hoc est circuli uel ellipsis grauitatis centrum in medio lineæ f g, quod est e, consistet, ex quarta propositione eiusdem libri Archimedis. ergo circuli, uel ellipsis centrum grauitatis est idem, quod figuræ centrum. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

Ex quibus sequitur portionis circuli, uel ellipsis, quæ dimidia maior sit, centrum grauitatis in diametro quoque ipsius consistere.



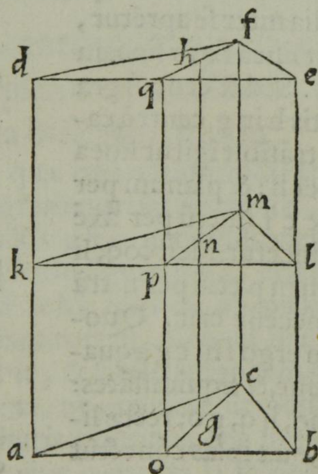

Sit enim maior portio a b c, cuius diameter b d, & compleatur circulus, uel ellipsis, ut portio reliqua sit a e c, dia metrum

metrum habens e d. Quoniam igitur circuli uel ellipsis a e c b grauitatis centrum est in diametro b e, & portionis a e c centrum in linea e d: reliquæ portionis, uidelicet a b c centrum grauitatis in ipsa b d consistat necesse est, ex octaua propositione eiusdem.

## THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI prisma secetur plano oppositis planis æqui distante, sectio erit figura æqualis & similis ei, quæ est oppositorum planorum, centrum graui tatis in axe habens.

Sit prisma, in quo plana opposita sint triangula a b c, d e f; axis g h: & secetur plano iam dictis planis æquidistã te; quod faciat sectionem k l m; & axi in pũcto n occurrat. Dico k l m triangulum æquale esse, & simile triangulis a b c d e f; atque eius grauitatis centrum esse punctum n. Quoniam enim plana a b c K l m æquidistantia secã tur a plano a e; rectæ lineæ a b, K l, quæ sunt ipsorum cõmunes sectiones inter se se æquidistant. 16.undecimi. Sed æquidistant a d, b e; cum a e sit parallelogrammum, ex prismatis diffinitione. ergo & a l parallelogrammũ erit; & propterea linea k l, ipsi a b æqualis. 34.primi Similiter demonstrabitur l m æquidistans, & æqualis b c; & m k ipsi c a.



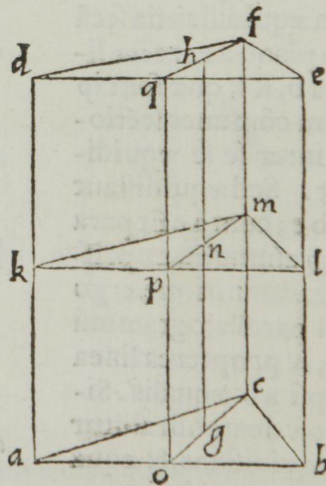
Itaque quoniam duæ lineæ K l, l m ſe ſe tangentes, duab us lineis ſe ſe tangentibus a b, b c æquidiſtant; nec ſunt in e o- dem plano: angulus K l m æqualis eſt angulo a b c: & ita an gulus l m K, angulo b c a, & m K l ipſi c a b æqualis prob abi tur. triangulum ergo K l m eſt æquale, & ſimile triangulo a b c. quare & triangulo d e f. Ducatur linea c g o, & per ip ſam, & per c f ducatur planum ſecans priſma; cuius & paral lelogrammi a e communis ſectio ſit o p q. tranſibit linea f q per h, & m p per n. nam cum plana æquidiſtantia ſecen tur à plano c q, communes eorum ſectiones c g o, m p, f q ſibi ipſis æquidiſtabunt. Sed & æquidiſtant a b, K l, d e. an- guli ergo a o c, K p m, d q f inter ſe æquales ſunt: & ſunt æquales qui ad puncta a K d conſtituuntur. quare & reliqui reliquis æquales; & triangula a c o, K m p, d f q inter ſe ſimi lia erunt. Vt igitur c a ad a o, ita f d ad d q: & permutando ut c a ad f d, ita a o ad d q. eſt autem c a æqualis f d. ergo & a o ipſi d q. eadem quoque ratione & a o ipſi K p æqualis demonſtrabitur. Itaque ſi triangula, a b c, d e f æqualia & ſimilia inter ſe aptētur, cadet linea f q in lineam c g o. Sed & centrũ gra uitatis h in g centrũ ca- det. trãſibit igitur linea f q per h: & planum per c o & c f ductũ per axẽ g h ducetur: idcircoq; li neam m p etiã per n trã ſire neceſſe erit. Quo- niam ergo f h, c g æqua- les ſunt, & æquidiſtãtes: itemq; h q, g o; rectæ li- neæ, quæ ipſas cõnectũt c m f, g n h, o p q æqua- les & æquidiſtãtes erũt.

10. undecimi

10. undecimi

4. ſexti

per 5. petitionem Archimedis.




æqui-

æquidiſtant autem c g o, m n p. ergo parallelogrãma ſunt o n, g m, & linea m n æqualis c g; & n p ipſi g o. aptatis igitur κ l m, a b c triãgulis, quæ æqualia & ſimilia sũt; linea m p in c o, & punctum n in g cadet. Quòd cũ g ſit centrum grauitatis trianguli a b c, & n trianguli κ l m grauitatis centrum erit id, quod demonſtrandum relinquebatur. Simili ratione idem contingere demonſtrabimus in aliis priſmatibus, ſiue quadrilatera, ſiue plurilatera habeant plana, quæ opponuntur.

## COROLLARIVM.

Ex iam demonſtratis perſpicue apparet, cuiuslibet priſmatis axem, parallelogrammorum lateribus, quæ ab oppoſitis planis ducũtur æquidiſtare.

## THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Cuiuslibet priſmatis centrum grauitatis eſt in plano, quod oppoſitis planis æquidiſtans, reliquorum planorum latera bifariam diuidit.

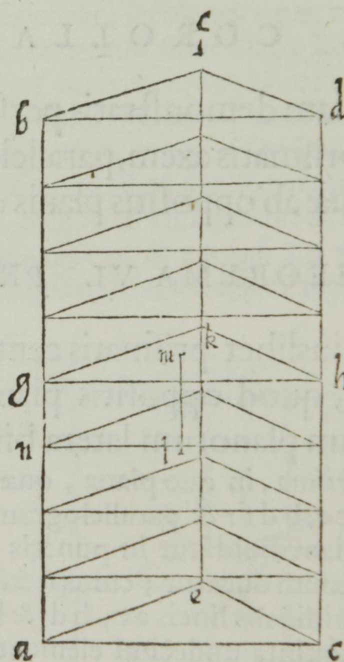
Sit priſma, in quo plana, quæ opponuntur ſint triangula a c e, b d f: & parallelogrammorum latera a b, c d, e f bifariam diuidãtur in punctis g h κ: per diuiſiones autem planum ducatur; cuius ſectio figura g h κ. erit linea g h æquidiſtans lineis a c, b d & h k ipſis c e, d f. quare ex decimaquinta undecimi elementorum, planum illud plana nis a c e, b d f æquidiſtabit, & faciet ſectionem figuram ipſis æqualem, & ſimilem, ut proxime demonſtrauimus. Dico centrum grauitatis priſmatis eſſe in plano g h κ. Si enim fieri poteſt, ſit eius centrum l: & ducatur l m uſque ad planum g h κ, quæ ipſi a b æquidiſtet.

33. primi

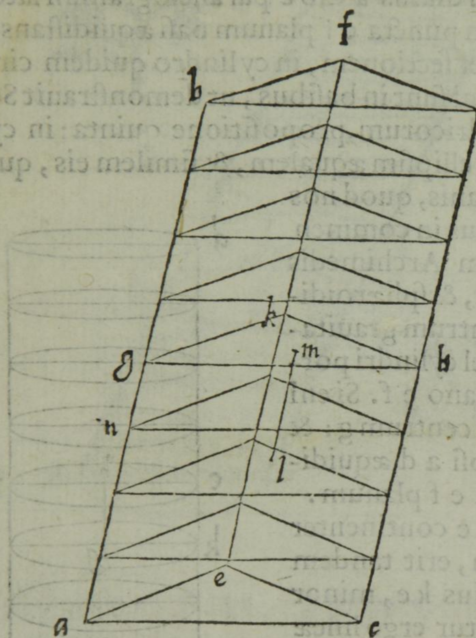
5. huius

1. decimi ergo linea a g continenter in duas partes æquales diuisa, relinquetur tãdem pars aliqua n g, quæ minor erit l m. Vtraque uero linearum a g, g b diuidatur in partes æquales ipsi n g: & per puncta diuisionum plana oppositis planis æquidistantia ducantur. erunt sectiones figuræ æquales, ac similes ipsis a c e, b d f: & totum prisma diuisum erit in prismata æqualia, & similia: quæ cum inter se congruãt; & grauitatis centra sibi ipsis congruentia, respondentiaq; habebunt. Itaq: sunt magnitudines quædã æquales ipsi n h, & numero pares, quarum centra grauitatis in eadẽ recta linea constituuntur: duæ uero mediæ æquales sunt: & quæ ex utraque parte ipsarum similiter æquales: & æquales rectæ lineæ, quæ inter grauitatis centra interiiciuntur. quare ex corollario quintæ propositionis primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum; magnitudinis ex his omnibus compositæ centrum grauitatis est in medio lineæ, quæ magnitudinum mediarum centra coniungit. at qui non ita res habet,

5. huius



bet, si quidem l extra medias magnitudines positum est. Constat igitur centrum grauitatis prismatis esse in plano

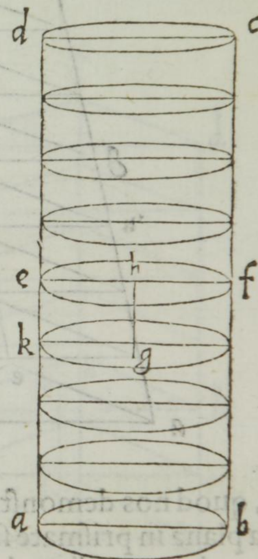


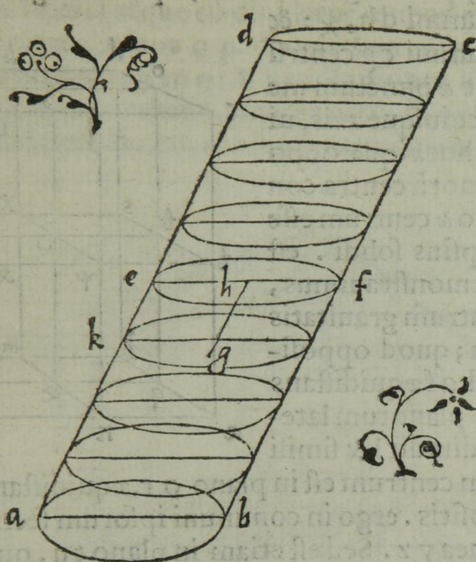

g h k, quod nos demonstrandum proposuimus. At si opposita plana in prismate sint quadrilatera, uel plurilatera, eadem erit in omnibus demonstratio.

## THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Cuiuslibet cylindri, & cuiuslibet cylindri portionis centrum grauitatis est in plano, quod basibus æquidistans, parallelogrammi per axem latera bifariam secat.

SIT cylindrus, uel cylindri portio a c: & plano per axem ducto secetur; cuius sectio sit parallelogrammum a b c d: & bifariam diuisis a d, b c parallelogrammi lateribus, per diuisionum puncta e f planum basi æquidistans ducatur; quod faciet sectionem, in cylindro quidem circulum æqualem iis, qui sunt in basibus, ut demonstrauit Serenus in libro cylindricorum, propositione quinta: in cylindri uero portione ellipsim æqualem, & similem eis, quæ sunt in oppositis planis, quod nos demonstrauimus in commentariis in librum Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus. Dico centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis esse in plano e f. Si enim fieri potest, sit centrum g: & ducatur g h ipsi a d æquidistans, usque ad e f planum. Itaque linea a e continenter diuisa bifariam, erit tandem pars aliqua ipsius k e, minor g h. Diuidantur ergo lineæ a e, e d in partes æquales ipsi k e: & per diuisiones plana basibus æquidistantia ducatur. erunt iam sectiones, figuræ æquales, & similes eis, quæ sunt in basibus: atque erit cylindrus in cylindros diuisus: & cylindri portio in portiones æquales, & similes ipsi k f. reliqua similiter, ut superius in prismate concludentur.



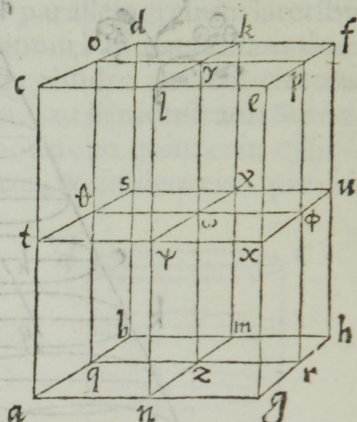



## THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Cuiuslibet priſmatis, & cuiuslibet cylindri, uel cylindri portionis grauitatis centrum in medio ipſius axis conſiſtit.

Sit primum a f priſma æquidiſtantibus planis contentũ, quod ſolidum parallelepipedum appellatur: & oppoſitorum planorum c f, a h, d a, f g latera bifariam diuidantur in punctis k l m n o p q r s t u x: & per diuiſiones ducantur plana k n, o r, s x. communes autem eorum planorum ſectiones ſint lineæ y z, ϑ φ, χ ψ: quæ in puncto ω conueniãt. erit ex decima eiuſdem libri Archimedis parallelogrammi c f centrum grauitatis punctum y; parallelogrammi a h

centrum z: parallelogrammi a d, θ: parallelogrammi f g, φ: parallelogrammi d h, χ: & parallelogrammi c g centrũ ψ: atque erit ω punctum medium uniuſcuiuſque axis, uidelicet eius lineæ, quæ oppoſitorum planorũ centra coniungit. Dico ω centrum eſſe grauitatis ipſius ſolidi. eſt

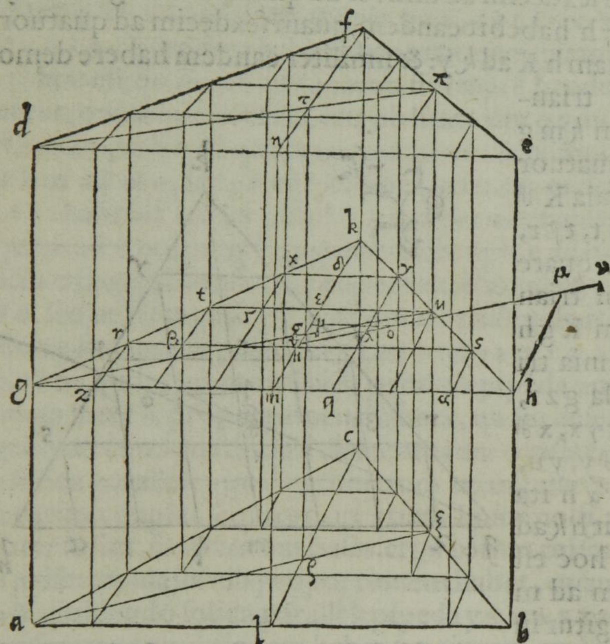



6.huius enim, ut demonſtrauimus, ſolidi a f centrum grauitatis in plano K n; quod oppoſitis planis a d, g f æquidiſtans reliquorum planorum latera bifariam diuidit: & ſimili ratione idem centrum eſt in plano o r, æquidiſtante planis a e, b f oppoſitis. ergo in communi ipſorum ſectione: uidelicet in linea y z. Sed eſt etiam in plano t u, quod quidẽ y z ſecat in ω. Conſtat igitur centrum grauitatis ſolidi eſſe punctum ω, medium ſcilicet axium, hoc eſt linearum, quæ planorum oppoſitorum centra coniungunt.

Sit aliud priſma a f; & in eo plana, quæ opponuntur, triangula a b c, d e f: diuiſisq; bifariam parallelogrammorum lateribus a d, b e, c f in punctis g h k, per diuiſiones planũ ducatur, quod oppoſitis planis æquidiſtans faciet ſectionẽ triangulum g h κ æquale, & ſimile ipſis a b c, d e f. Rurſus diuidatur a b bifariam in l: & iuncta c l per ipſam, & per c K f planum ducatur priſma ſecans, cuius, & parallelogrã mi a e communis ſectio ſit l m n. diuidet punctum m lineam g h bifariam; & ita n diuidet lineam d e: quoniam
5.huius triangula a c l, g κ m, d f n æqualia ſunt, & ſimilia, ut ſupra demonſtrauimus. Iam ex iis, quæ tradita ſunt, conſtat centrum grauitatis priſmatis in plano g h κ contineri. Dico ipſum eſſe in linea k m. Si enim fieri poteſt, ſit o centrum;

& per

& per o ducatur o p ad k m ipſi h g æquidiſtans. Itaque linea h m bifariã uſque eò diuidatur, quoad reliqua ſit pars quædam q m, minor o p. deinde h m, m g diuidantur in partes æquales ipſi m q: & per diuiſiones lineæ ipſi m K æquidiſtantes ducantur. puncta uero, in quibus hæ triangulorum latera ſecant, coniungantur ductis lineis r s, t u,



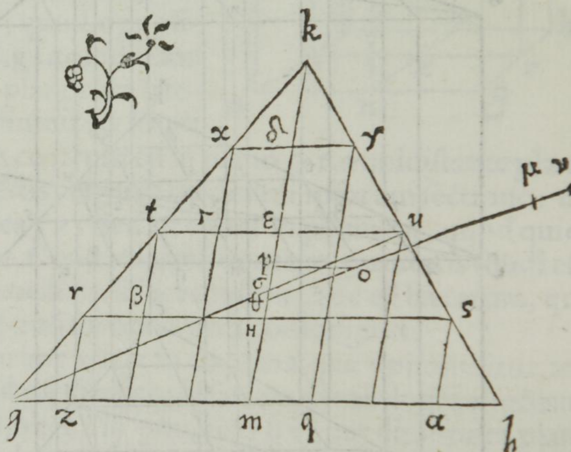

x y; quæ baſi g h æquidiſtabunt. Quoniam enim lineæ g z, h α ſunt æquales: itemq; æquales g m, m h: ut m g ad g z, ita erit m h, ad h α: & diuidendo, ut m z ad z g, ita m α ad α h. Sed ut m z ad z g, ita k r ad r g: & ut m α ad α h, ita k s ad s h. quare ut k r ad r g, ita κ s ad s h. æquidiſtant igitur inter ſe ſe r s, g h. eadem quoque ratione demonſtrabimus

2. ſexti.
11. quinti
2. ſexti.

tu,xy ipſi g h æquidiſtare. Et quoniam triangula, quæ fiunt à lineis K y,y u,u s, s h æqualia ſunt inter ſe, & ſimilia triangulo K m h: habebit triangulum K m h ad triangulũ K δ y duplam proportionem eius,quæ eſt lineæ κ h ad K y. ſed K h poſita eſt quadrupla ipſius k y. ergo triangulum k m h ad triangulum K δ y eãdem proportionem habebit, quam ſexdecim ad unũ: & ad quatuor triangula k δ y, y u, u s,s α h habebit eandem,quam ſexdecim ad quatuor, hoc eſt quam h K ad k y: & ſimiliter eandem habere demonſtra bitur triangulum k m g ad quatuor triãgula K δ x, x γ t, t β r, r z g. quare totum triangulum K g h ad omnia triangula g z r, r β t, t γ x, x δ K, K δ y, y u, u s, s α h ita erit,ut h k ad k y, hoc eſt ut h m ad m q. Si igitur in triangulis a b c, d e f deſcribantur figuræ ſimiles ei,quæ deſcripta eſt in g h K triangulo: & per lineas ſibi reſpondentes plana ducantur: totum priſma a f diuiſum erit in tria ſolida parallelepipeda y γ,u β,s z,quorum baſes ſunt æqua les & ſimiles ipſis parallelogrammis y γ,u β, s z: & in octo priſmata g z r, r β t, t γ x, x δ K, k δ y, y u,u s,s α h: quorum item baſes æquales,& ſimiles ſunt dictis triangulis; altitudo autem in omnibus,totius priſmatis altitudini æqualis.

19. ſexti

2. uel 12. quinti.



Itaque solidi parallelepipedi y γ centrum grauitatis est in linea δ ε: solidi u β centrum est in linea ε η: & solidi s z in linea η m, quæ quidem lineæ axes sunt, cum planorum oppositorum centra coniungant. ergo magnitudinis ex his solidis compositæ centrum grauitatis est in linea δ m, quod sit θ; & iuncta θ o producatur: à puncto autem h ducatur h μ ipsi m k æquidistans, quæ cum θ o in μ conueniat. triangulum igitur g h k ad omnia triangula g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h eandem habet proportionem, quam h m ad m q; hoc est, quam μ θ ad θ λ: nam si h m, μ θ produci intelligantur, quousque coeant; erit ob linearum q y, m k æquidistantiam, ut h q ad q m, ita μ λ ad ad λ θ: & componendo, ut h m ad m q, ita μ θ ad θ λ. linea uero θ o maior est, quàm θ λ: habebit igitur μ θ ad θ λ maiorem proportionem, quàm ad θ o. quare triangulum etiam g h κ ad omnia iam dicta triangula maiorem proportionẽ habebit, quàm μ θ ad θ o. sed ut triangulũ g h κ ad omnia triangula, ita totũ prisma a f ad omnia prismata g z r, r β t, t γ x, x δ κ, κ δ y, y u, u s, s α h: quoniam enim solida parallelepipeda æque alta, eandem inter se proportionem habent, quam bases; ut ex trigesimasecunda undecimi elementorum constat. sunt autem solida parallelepipeda prismatum triangulares bases habentium dupla: sequitur, ut etiam huiusmodi prismata inter se sint, sicut eorum bases. ergo totum prisma ad omnia prismata maiorem proportionem habet, quam μ θ ad θ o: & diuidendo solida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia prismata proportionem habent maiorem, quàm μ o ad o θ. fiat ν o ad o θ, ut solida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia prismata. Itaque cum à prismate a f, cuius cẽtrum grauitatis est o, auferatur magnitudo ex solidis parallelepipedis y γ, u β, s z constans: atque ipsius grauitatis centrum sit θ: reliquæ magnitudinis, quæ ex omnibus prismatibus constat, grauitatis centrum erit in linea θ o producta: & in puncto ν, ex octaua propositione eiusdem libri Archi-

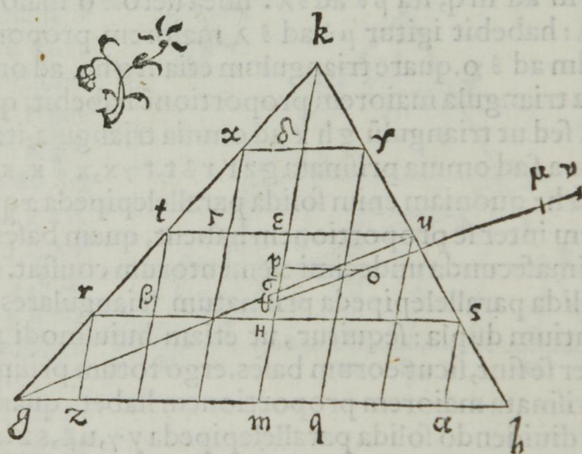
8. quinti.

28. undecimi

15. quinti

19. quinti apud Cãpanum.

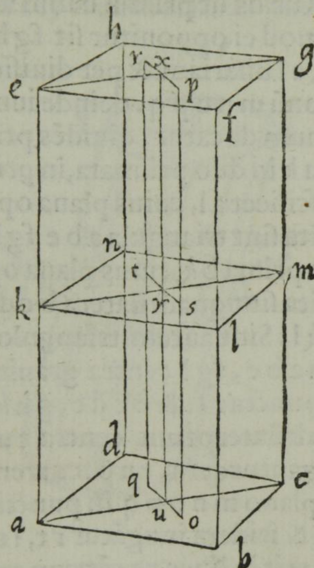
medis. ergo punctum ν extra prisma a f positum, centrũ erit magnitudinis cõpositæ ex omnibus prismatibus g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h, quod fieri nullo modo po test. est enim ex diffinitione centrum grauitatis solidæ figu ræ intra ipsam positum, non extra. quare relinquitur, ut cẽ trum grauitatis prismatis sit in linea K m. Rursus b c bifariam in ξ diuidatur: & ducta a ξ, per ipsam, & per lineam a g d planum ducatur; quod prisma secet: faciatq; in paral lelogrammo b f sectionem ξ π diuidet punctum π lineam quoque c f bifariam: & erit plani eius, & trianguli g h K communis sectio g u; quòd pũctum u in medio lineæ h K




positum sit. Similiter demonstrabimus centrum grauitatis prismatis in ipsa g u inesse. sit autem planorum c f n l, a d π ξ communis sectio linea ρ σ τ; quæ quidem prismatis axis erit, cum transeat per centra grauitatis triangulorum a b c, g h κ, d e f, ex quartadecima eiusdem. ergo centrum grauitatis prismatis a f est punctum σ, centrum scilicet trianguli

trianguli g h K, & ipsius ρ τ axis medium.

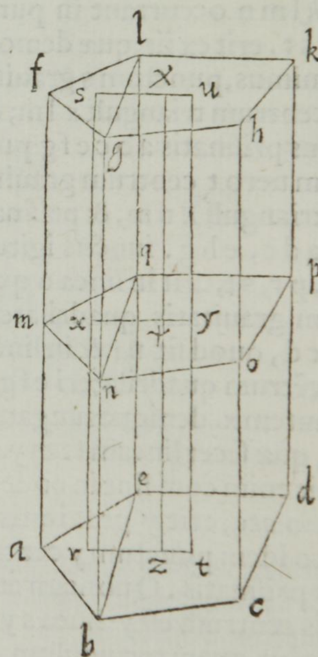
Sit prisma a g, cuius opposita plana sint quadrilatera a b c d, e f g h: secenturq; a e, b f, c g, d h bifariam: & per diuisiones planum ducatur; quod sectionem faciat quadrilaterum K l m n. Deinde iuncta a c per lineas a c, a e ducatur planum secãs prisma, quod ipsum diuidet in duo prismata triangulares bases habentia a b c e f g, a d c e h g. Sint autẽ triangulorum a b c, e f g grauitatis centra o p: & triangulorum a d c, e h g centra q r: iunganturq; o p, q r; quæ plano k l m n occurrant in punctis s t. erit ex iis, quæ demonstrauimus, punctum s grauitatis centrum trianguli κ l m; & ipsius prismatis a b c e f g: punctum uero t centrum grauitatis trianguli K n m, & prismatis a d c, e h g. iunctis igitur o q, p r, s t, erit in linea o q cẽtrum grauitatis quadrilateri a b c d, quod sit u: & in linea p r cẽtrum quadrilateri e f g h sit autem x. denique iungatur u x, quæ secet lineam s t in y. secabit enim cum sint in eodem plano: atq; erit y grauitatis centrum quadrilateri K l m n. Dico idem punctum y centrum quoque grauitatis esse totius prismatis. Quoniam enim quadrilateri k l m n grauitatis centrum est y: linea s y ad y t eandem proportionem habebit, quam triangulum κ n m ad triangulum k l m, ex 8 Archimedis de centro grauitatis planorum. Vt autem triãgulum κ n m ad ipsum κ l m, hoc est ut triangulum a d c ad triangulum a b c, æqualia enim sunt, ita prisma a d c e h g




5. huius.

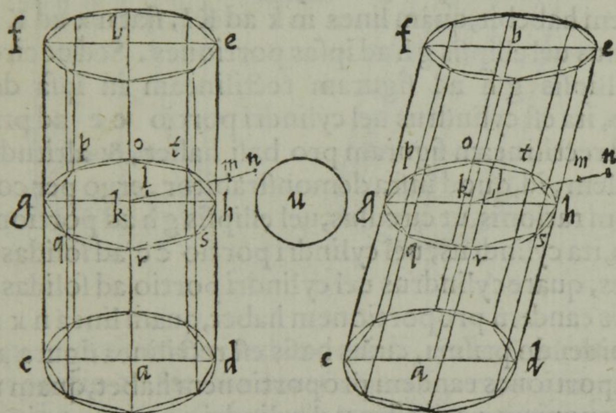
ad prisma a b c e f g. quare linea s y ad y t eandem proportionem habet, quam prisma a d c e h g ad prisma a b c e f g. Sed prismatis a b c e f g centrum grauitatis est s: & prismatis a d c e h g centrum t. magnitudinis igitur ex his compositæ, hoc est totius prismatis a g centrum grauitatis est punctum y; medium scilicet axis u x, qui oppositorum planorum centra coniungit.

Rursus sit prisma basim habens pentagonum a b c d e: & quod ei opponitur sit f g h k l: secenturq; a f, b g, c h, d k, e l bifariam: & per diuisiones ducto plano, sectio sit pētagonū m n o p q. deinde iuncta e b per lineas l e, e b aliud planum ducatur, diuidēs prisma a k in duo prismata; in prisma scilicet a l, cuius plana opposita sint triangula a b e f g l: & in prisma b k, cuius plana opposita sint quadrilatera b c d e g h k l. Sint autem triangulorum a b e, f g l centra grauitatis puncta r s: & b c d e, g h k l quadrilaterorum centra t u: iunganturq; r s, t u occurrentes plano m n o p q in punctis x y. & itidem iungātur r t, s u, x y. erit in linea r t cētrum grauitatis pentagoni a b c d e; quod sit z: & in linea s u centrum pentagoni f g h k l: sit autem χ: & ducatur z χ, quæ dicto plano in ψ occurrat. Itaq; punctum x est centrum grauitatis trianguli m n q, ac prismatis a l: & y grauitatis centrum quadrilateri n o p q, ac prismatis b k. quare y centrum erit pentagoni m n o p q. & similiter



similiter demonſtrabitur totius priſmatis a K grauitatis eſſe centrum. Simili ratione & in aliis priſmatibus illud idem facile demonſtrabitur. Quo autem pacto in omni figura rectilinea centrum grauitatis inueniatur, docuimus in commentariis in ſextam propoſitionem Archimedis de quadratura parabolæ.

Sit cylindrus, uel cylindri portio c e cuius axis a b: ſeceturq; plano per axem ducto; quod ſectionem faciat parallelogrammum c d e f: & diuiſis c f, d e bifariam in punctis



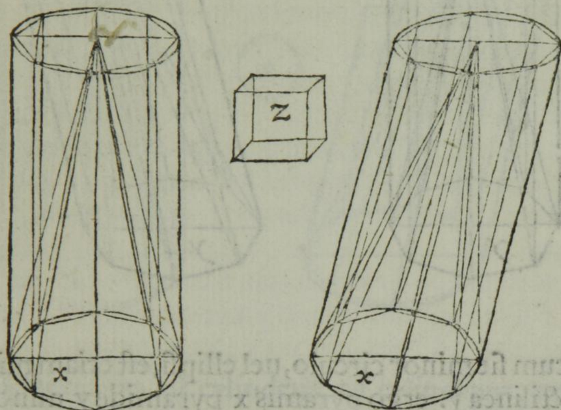

g h, per ea ducatur planum baſi æquidiſtans. erit ſectio g h circulus, uel ellipſis, centrum habens in axe; quod ſit K: atque erunt ex iis, quæ demonſtrauimus, centra grauitatis planorum oppoſitorum puncta a b: & plani g h ipſum k. in quo quidem plano eſt centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis. Dico punctum K cylindri quoque, uel cylindri portionis grauitatis centrum eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit l centrum: ducaturq; k l, & extra figuram in m producatur. quam uero proportionem habet linea m K ad k l 4. huius.

habeat circulus, uel ellipsis g h ad aliud spacium, in quo u: & in circulo, uel ellipsi plane describatur rectilinea figura, ita ut tãdem relinquãtur portiones minores spacio u, quæ sit o p g q r s h t: descriptaq; simili figura in oppositis planis c d, f e, per lineas sibi ipsis respondentes plana ducãtur. Itaque cylindrus, uel cylindri portio diuiditur in prisma, cuius quidem basis est figura rectilinea iam dicta, centrum que grauitatis punctum K: & in multa solida, quæ pro basi bus habent relictas portiones, quas nos solidas portiones appellabimus. cum igitur portiones sint minores spacio u, circulus, uel ellipsis g h ad portiones maiorem proportionem habebit, quàm linea m k ad K l. fiat n κ ad K l, ut circulus uel ellipsis g h ad ipsas portiones. Sed ut circulus uel ellipsis g h ad figuram rectilineam in ipsa descriptam, ita est cylindrus uel cylindri portio c e ad prisma, quod rectilineam figuram pro basi habet, & altitudinem æqualem; id, quod infra demonstrabitur. ergo per conuersionem rationis, ut circulus, uel ellipsis g h ad portiones relictas, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad solidas portiones, quare cylindrus uel cylindri portio ad solidas portiones eandem proportionem habet, quam linea n κ ad k l & diuidendo prisma, cuius basis est rectilinea figura ad solidas portiones eandem proportionem habet, quam n l ad l k. & quoniam a cylindro uel cylindri portione, cuius grauitatis centrum est l, aufertur prisma basim habens rectilineam figurã, cuius centrũ grauitatis est K: residuæ magnitudinis ex solidis portionibus cõpositæ grauitatis cẽtrũ erit in linea k l protracta, & in puncto n; quod est absurdũ. relinquitur ergo, ut cẽtrum grauitatis cylindri; uel cylindri portionis sit punctũ k. quæ omnia demonstrãda proposuimus.

At uero cylindrum, uel cylindri portionẽ c e ad prisma, cuius basis est rectilinea figura in spacio g h descripta, & altitudo æqualis; eandem habere

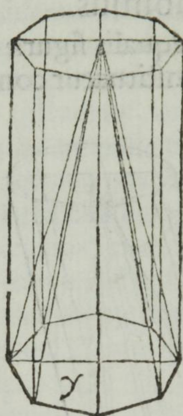
bere proportionem, quam ſpacium g h ad dictã figuram, hoc modo demonſtrabimus.

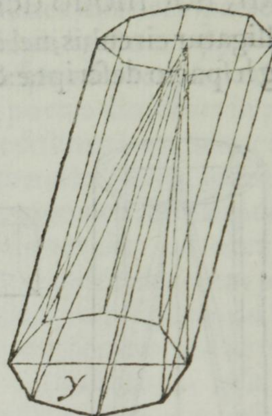
Intelligatur circulus, uel ellipſis x æqualis figuræ rectilineæ in g h ſpacio deſcriptæ: & ab x conſtituatur conus, uel



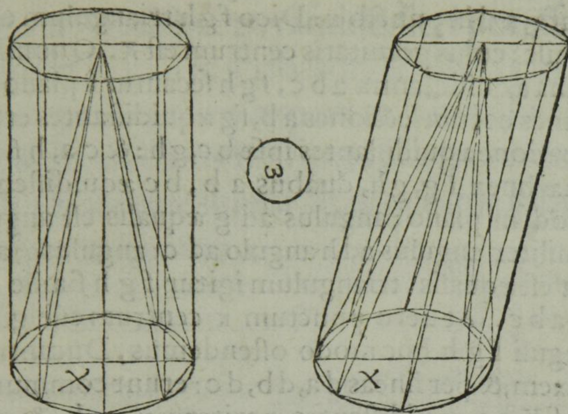

coni portio, altitudinẽ habens eandẽ, quã cylindrus uel cylindri portio c e. Sit deinde rectilinea figura, in qua y eadẽ, quæ in ſpacio g h deſcripta eſt: & ab hac pyramis æquealta conſtituatur. Dico conũ uel coni portionẽ x pyramidi y æqualẽ eſſe. niſi enim ſit æqualis, uel maior, uel minor erit.

Sit primum maior, et exuperet ſolido z. Itaque in circulo, uel ellipſi x deſcribatur figura rectilinea; & in ea pyramis eandem, quam conus, uel coni portio altitudinem habens, ita ut portiones relictæ minores ſint ſolido z, quemadmodum docetur in duodecimo libro elementorum propoſitione undecima. erit pyramis x adhuc pyramide y maior. & quoniam piramides æque altæ inter ſe ſunt, ſicuti baſes; pyramis x ad piramidem y eandem proportionem habet, quàm figura rectilinea x ad figuram y. Sed figura recti 6. duodecimi.






linea x cum ſit minor circulo, uel ellipſi, eſt etiam minor figura rectilinea y. ergo pyramis x pyramide y minor erit. Sed & maior; quod fieri nõ poteſt. At ſi conus, uel coni portio x ponatur minor pyramide y: ſit alter conus æque altus, uel altera coni portio χ ipſi pyramidi y æqualis. erit eius baſis circulus, uel ellipſis maior circulo, uel ellipſi x, quorum exceſſus ſit ſpacium ω. Si igitur in circulo, uel ellipſi χ figura rectilinea deſcribatur, ita ut portiones relictæ ſint ω ſpacio minores, eiuſmodi figura adhuc maior erit circulo, uel ellipſi x, hoc eſt figura rectilinea y. & pyramis in ea conſtituta minor cono, uel coni portione χ, hoc eſt minor pyramide y. eſt ergo ut χ figura rectilinea ad figuram rectilineam y, ita pyramis χ ad pyramidem y. quare cum figura rectilinea χ ſit maior figura y: erit & pyramis χ pyramide y maior. ſed erat minor; quod rurſus fieri non poteſt. non eſt igitur conus, uel coni portio x neque maior, neque minor pyramide y. ergo ipſi neceſſario eſt æqualis. Itaque quoniam ut conus ad conum, uel coni portio ad coni

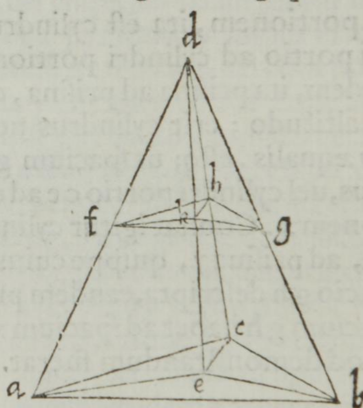


ni portionem, ita est cylindrus ad cylindrum, uel cylindri portio ad cylindri portionem: & ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma, cum eadem sit basis, & æqualis altitudo; erit cylindrus uel cylindri portio x prismati y æqualis. estq; ut spacium g h ad spacium x, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad cylindrum, uel cylindri portionem x. Constat igitur cylindrum uel cylindri portionē c e, ad prisma y, quippe cuius basis est figura rectilinea in spacio g h descripta, eandem proportionem habere, quam spacium g h habet ad spacium x, hoc est ad dictam figuram. quod demonstrandum fuerat. 7. quinti

## THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si pyramis secetur plano basi æquidistante; sectio erit figura similis ei, quæ est basis, centrum grauitatis in axe habens.

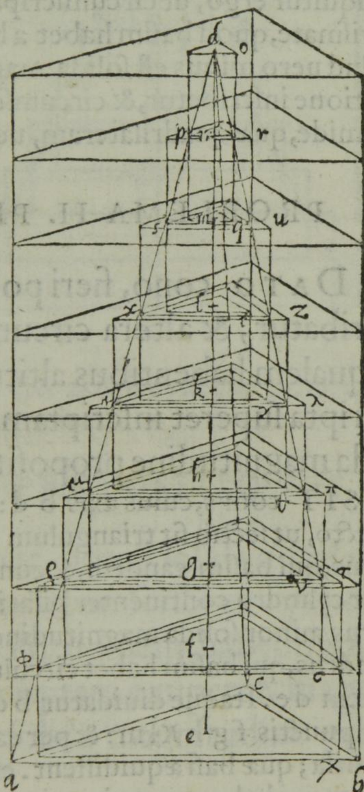
SIT pyramis, cuius basis triangulum a b c; axis d e: & secetur plano basi æquidistante; quod sectionẽ faciat f g h; occurratq; axi in puncto K. Dico f g h triangulum esse, ipsi
16. undecimi a b c simile; cuius grauitatis centrum est K. Quoniã enim duo plana æquidistantia a b c, f g h secantur à plano a b d; communes eorum sectiones a b, f g æquidistantes erunt: & eadem ratione æquidistantes ipsæ b c, g h: & c a, h f. Quòd cum duæ lineæ f g, g h, duabus a b, b c æquidistent, nec
10. undecimi. sint in eodem plano; angulus ad g æqualis est angulo ad b: & similiter angulus ad h angulo ad c: angulusq; ad f ei, qui ad a est æqualis. triangulum igitur f g h simile est triangulo a b c. At uero punctum K centrum esse grauitatis trianguli f g h hoc modo ostendemus. Ducantur plana
16. undecimi per axem, & per lineas d a, d b, d c: erunt communes sectiones f K, a e æquidistantes: pariterq; K g, e b; & K h, e c:
10. undecimi quare angulus K f h angulo e a c; & angulus K f g ipsi e a b est æqualis. Eadem ratione anguli ad g angulis ad b: & anguli ad h iis, qui ad c æquales erunt. ergo puncta e K in triangulis a b c, f g h similiter sunt posita, per sextam positionem Archimedis in libro de centro grauitatis planorum. Sed cum e sit centrum grauitatis trianguli a b c, erit ex undecima propositione eiusdem libri, & K trianguli f g h grauitatis centrum. id quod demonstrare oportebat. Non aliter in ceteris pyramidibus, quod propositum est demonstrabitur.




PRO

## PROBLEMA I. PROPOSITIO X.

DATA qualibet pyramide, fieri poteſt, ut figura ſolida in ipſa inſcribatur, & altera circūſcribatur ex priſmatibus æqualem altitudinem habẽtibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ minor ſit quacūque ſolida magnitudine propoſita.



Sit pyramis, cuius baſis triangulū a b c; axis d e. Sitq; priſma, quod eandē baſim habeat, & axem eundem. Itaque hoc priſmate continenter ſecto biſariam, plano baſi æquidiſtāte, relinquetur tādem priſma quoddam minus propoſita magnitudine: quod quidem baſim eandem habeat, quam pyramis, & axem e f. diuidatur d e in partes æquales ipſi e f in punctis g h k l m n: & per diuiſiones plana ducātur: quæ baſibus æquidiſtent, erunt ſectiones, triangula ipſi a b c ſimilia, ut proxime oſtendimus. ab uno quoque autē horum triangulorum duo priſmata cōſtruantur; unum quidem ad partes e; alterum ad

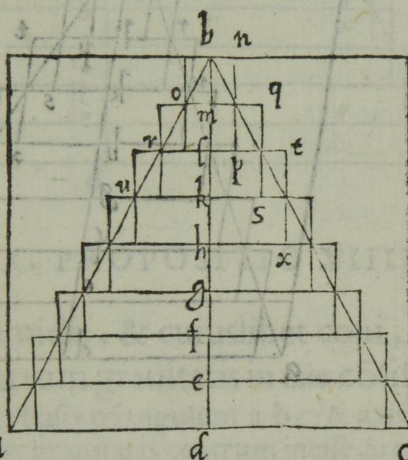
partes d. in pyramide igitur inſcripta erit quædam figura, ex priſmatibus æqualem altitudinem habentibus cõſtans, ad partes e: & altera circumſcripta ad partes d. Sed unumquodque eorum priſmatum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale eſt priſmati, quod ab eodem fit triangulo in figura circumſcripta: nam priſma p q priſmati p o eſt æquale; priſma s t æquale priſmati s r; priſma x y priſmati x u; priſma $\eta\theta$ priſmati $\eta$ z; priſma $\mu\nu$ priſmati $\mu\lambda$; priſma $\rho\sigma$ priſmati $\rho\pi$; & priſma $\phi\chi$ priſmati $\phi\tau$ æquale. relinquitur ergo, ut circumſcripta figura exuperet inſcriptã priſmate, quod baſim habet a b c triangulum, & axem e f. Illud uero minus eſt ſolida magnitudine propoſita. Eadẽ ratione inſcribetur, & circumſcribetur ſolida figura in pyramide, quæ quadrilateram, uel plurilaterã baſim habeat.

## PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

DATO cono, fieri poteſt, ut figura ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem habentibus altitudinem, ita ut circumſcripta ſuperet inſcriptam, magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

SIT conus, cuius axis b d: & ſecetur plano per axem ducto, ut ſectio ſit triangulum a b c: intelligaturq; cylindrus, qui baſim eandem, & eundem axem habeat. Hoc igitur cylindro continenter biſariam ſecto, relinquetur cylindrus minor ſolida magnitudine propoſita. Sit autem is cylindrus, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem d e. Itaque diuidatur b d in partes æquales ipſi d e in punctis f g h K l m: & per ea ducantur plana conum ſecantia; quæ baſi æquidiſtent. erunt ſectiones circuli, centra in axi habentes, ut in primo libro conicorum, propoſitione

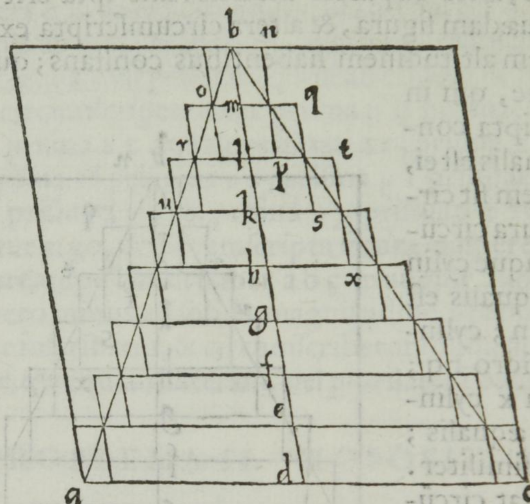
tione quarta Apollonius demonſtrauit. Si igitur à ſingulis horum circulorum, duo cylindri fiant; unus quidem ad baſis partes; alter ad partes uerticis: inſcripta erit in cono ſolida quædam figura, & altera circumſcripta ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtans; quorum unuſquiſque, qui in figura inſcripta continetur æqualis eſt ei, qui ab eodem fit circulo in figura circũſcripta. Itaque cylindrus o p æqualis eſt cylindro o n; cylindrus r s cylĩdro r q; cylindrus u x cylindro u t eſt æqualis; & alii aliis ſimiliter. quare conſtat circũſcriptam figuram ſuperare inſcriptam cylindro, cuius baſis eſt circulus circa diametrum a c, & axis d e. atque hic eſt minor ſolida magnitudine propoſita.




PROBLEMA III. PROPOSITIO XII.

DATA coni portione, poteſt ſolida quædam figura inſcribi, & altera circumſcribi ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumſcripta inſcriptam exuperet, magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita.

Figuram eiuſmodi, & inſcribemus, & circūſcribemus, ita ut in cono dictum eſt.

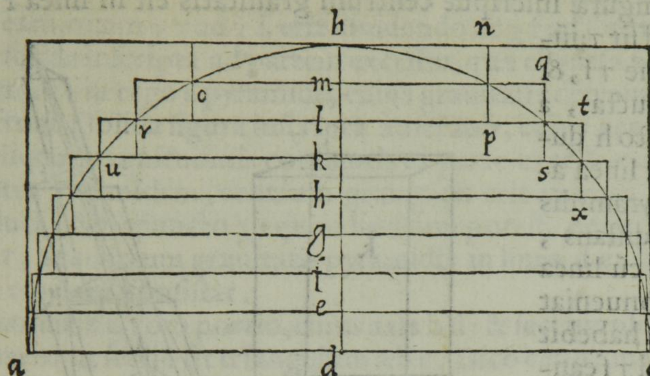



PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XIII.

DATA ſphæræ portione, quæ dimidia ſphæra maior non ſit, poteſt ſolida quædam portio inſcribi & altera circumſcribi ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

HOC etiam eodem prorſus modo fiet: atque ut ab Archimede traditum eſt in conoidum, & ſphæroidum portionibus, propoſitione uigeſimaprima libri de conoidibus, & ſphæroidibus.

THEO

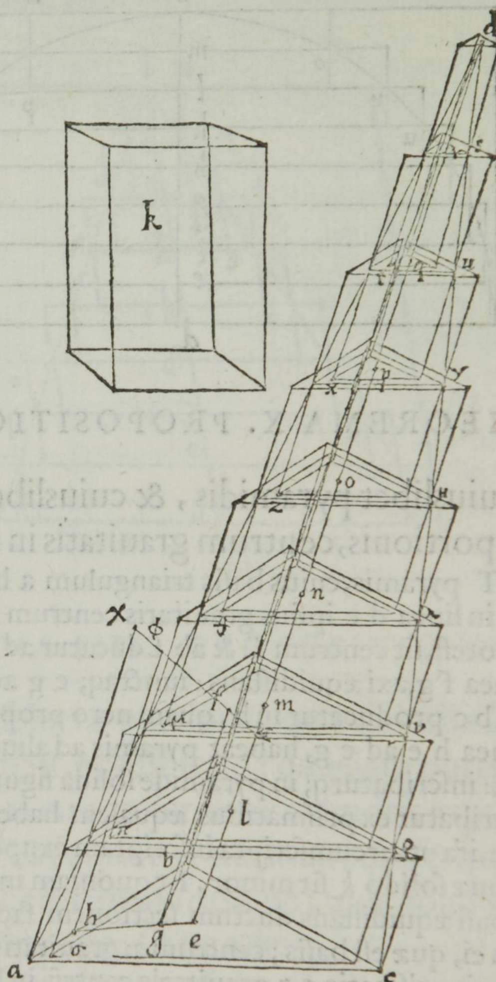



## THEOREMA X. PROPOSITIO XIIII.

Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, uel coni portionis, centrum grauitatis in axe cõsistit.

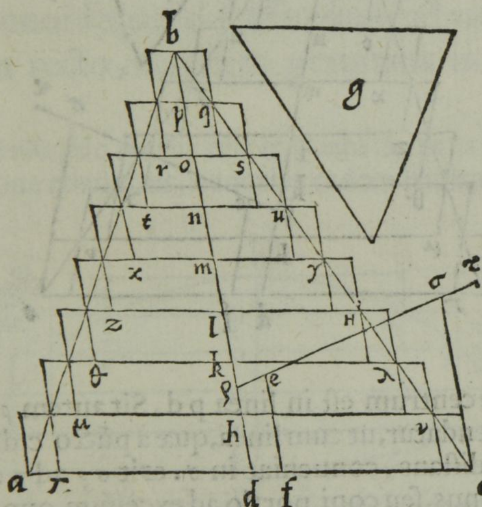
SIT pyramis, cuius basis triangulum a b c: & axis d e. Dico in linea d e ipsius grauitatis centrum inesse. Si enim fieri potest, sit centrum f: & ab f ducatur ad basim pyramidis linea f g, axi æquidistans: iunctaq; e g ad latera trianguli a b c producatur in h. quam uero proportionem habet linea h e ad e g, habeat pyramis ad aliud solidum, in quo K: inscribaturq; in pyramide solida figura, & altera circumscribatur ex prismatibus æqualem habentibus altitudinem, ita ut circumscripta inscriptam exuperet magnitudine, quæ solido k sit minor. Et quoniam in pyramide planum basi æquidistans ductum sectionem facit figuram similem ei, quæ est basis; centrumq; grauitatis in axe habentem: erit prismatis s t grauitatis centrũ in linea r q; prismatis u x centrum in linea q p; prismatis y z in linea p o; prismatis $\eta\theta$ in linea o n; prismatis $\lambda\mu$ in linea n m; prismatis $\nu\pi$ in m l; & denique prismatis $\rho\sigma$ in l e. quare to-

tius figuræ inſcriptæ centrum grauitatis eſt in linea r e: quod ſit τ: iũ-ctaque τ f, & producta, à puncto h ducatur linea axi pyramidis æquidiſtans, quæ cũ linea τ f conueniat in φ. habebit φ τ ad τ f eandem proportionem, quã h e ad e g. Quoniam igitur exceſſus, quo circũſcripta figura inſcriptam ſuperat, minor eſt ſolido κ; pyramis ad eundẽ exceſſũ maiorẽ proportionẽ habet, quàm ad κ ſolidum: uidelicet maiorem, quàm linea h e ad e g; hoc eſt quam φ τ ad τ f: & propterea multo maiorem habet ad partem exceſſus, quæ intra pyramidem comprehenditur. Itaque habeat



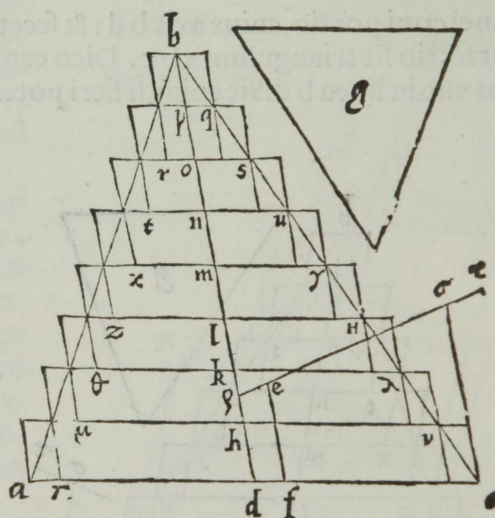
beat eam, quam χ τ ad τ f. erit diuidendo ut χ f ad f τ, ita figura ſolida inſcripta ad partem exceſſus, quæ eſt intra pyramidem. Cum ergo à pyramide, cuius grauitatis cẽtrum eſt punctum f, ſolida figura inſcripta auferatur, cuius centrũ τ: reliquæ magnitudinis conſtantis ex parte exceſſus, quæ eſt intra pyramidem, centrum grauitatis erit in linea τ f producta, & in puncto χ. quod fieri non poteſt. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in linea d e; hoc eſt in eius axe conſiſtat.

Sit conus, uel coni portio, cuius axis b d: & ſecetur plano per axem, ut ſectio ſit triangulum a b c. Dico centrum grauitatis ipſius eſſe in linea b d. Sit enim, ſi fieri poteſt, centrũ




e: perq; e ducatur e f axi æquidiſtans: & quam proportionem habet c d ad d f, habeat conus, uel coni portio ad ſolidum g. inſcribatur ergo in cono, uel coni portione ſoli-

da figura, & altera circumſcribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus, ſicuti dictum eſt, ita ut exceſſus, quo figura circumſcripta inſcriptam ſuperat, ſit ſolido g minor. Itaque centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis q r eſt in linea p o; cylindri, uel cylindri portionis s t centrum in linea o n; centrum u x in linea n m; y z in m b; $\kappa\theta$ in l k; $\lambda\,\mu$ in K h; & denique $\nu\pi$ centrum in h d. ergo figu-




ræ inſcriptæ centrum eſt in linea p d. Sit autem $\rho$: & iuncta $\rho$ e protendatur, ut cum linea, quæ à pũcto c ducta fuerit axi æquidiſtans, conueniat in $\sigma$. erit $\sigma\rho$ ad $\rho$ e, ut c d ad d f: & conus, ſeu coni portio ad exceſſum, quo circumſcripta figura inſcriptam ſuperat, habebit maiorem proportionem, quàm $\sigma\rho$ ad $\rho$ e. ergo ad partem exceſſus, quæ intra ipſius ſuperficiem comprehenditur, multo maiorem proportionem habebit. habeat eam, quam $\tau\rho$ ad $\rho$ e. erit

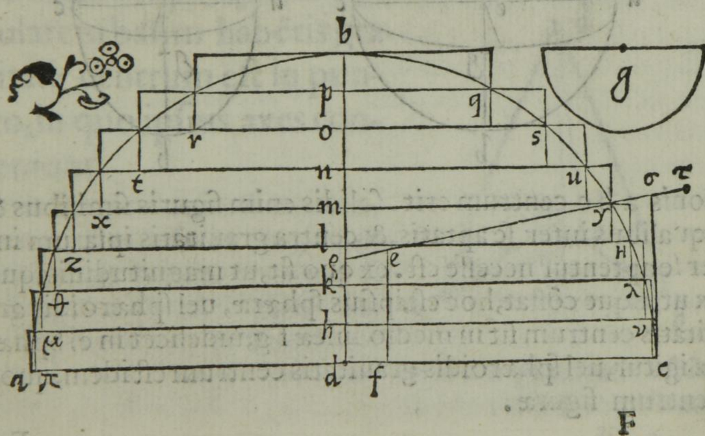
diuidendo

diuidendo figura ſolida inſcripta ad dictam exceſſus partem, ut τ e ad e ρ. & quoniam à cono, ſeu coni portione, cuius grauitatis centrum eſt e, aufertur figura inſcripta, cuius centrum ρ: reſiduæ magnitudinis compoſitæ ex parte exceſſus, quæ intra coni, uel coni portionis ſuperficiem continetur, centrum grauitatis erit in linea ρ e protracta, atque in puncto τ. quod eſt abſurdum. cõſtat ergo centrũ grauitatis coni, uel coni portionis, eſſe in axe b d: quod demonſtrandum propoſuimus.

## THEOREMA XI. PROPOSITIO XV.

**Cuiuslibet portionis ſphæræ uel ſphæroidis, quæ dimidia maior non ſit: itemq; cuiuslibet portionis conoidis, uel abſciſſæ plano ad axem recto, uel non recto, centrum grauitatis in axe conſiſtit.**

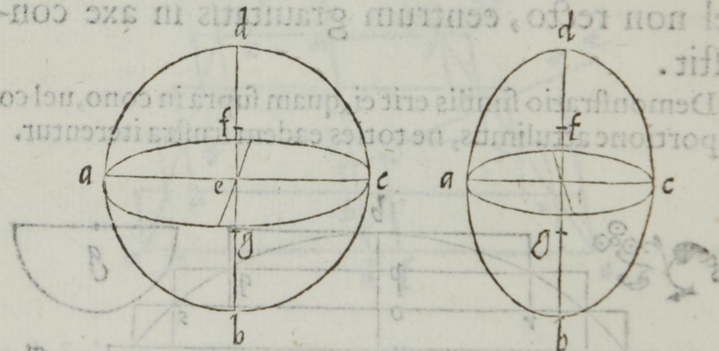
Demonſtratio ſimilis erit ei, quam ſupra in cono, uel coni portione attulimus, ne toties eadem fruſtra iterentur.



## THEOREMA XII. PROPOSITIO XVI.

In sphæra, & sphæroide idem est grauitatis, & figuræ centrum.

Secetur sphæra, uel sphæroides plano per axem ducto; quod sectionem faciat circulum, uel ellipsim a b c d, cuius diameter, & sphæræ, uel sphæroidis axis d b; & centrum e. Dico e grauitatis etiam centrum esse. secetur enim altero plano per e, ad planum secans recto, cuius sectio sit circulus circa diametrum a c. erunt a d c, a b c dimidiæ portiones sphæræ, uel sphæroidis. & quoniam portionis a d c grauitatis centrum est in linea d, & centrum portionis a b c in ipsa b e; totius sphæræ, uel sphæroidis grauitatis centrum in axe d b consistet. Quòd si portionis a d c centrum grauitatis ponatur esse f: & fiat ipsi f e æqualis e g: punctũ g por




tionis a b c centrum erit. solidis enim figuris similibus & æqualibus inter se aptatis, & centra grauitatis ipsarum inter se aptentur necesse est. ex quo fit, ut magnitudinis, quæ ex utrisque cõstat, hoc est ipsius sphæræ, uel sphæroidis grauitatis centrum sit in medio lineæ f g, uidelicet in e. Sphæræ igitur, uel sphæroidis grauitatis centrum est idem, quod centrum figuræ.

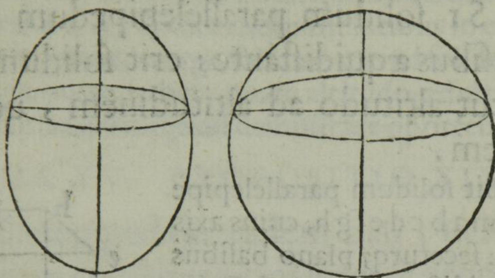
per 2. petitionem

4. Archimedis.

Ex

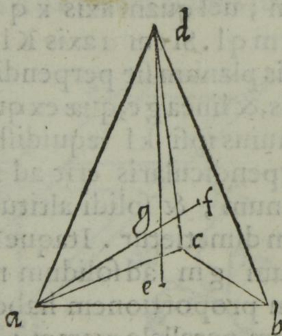
Ex demonstratis perspicue apparet, portioni sphæræ uel sphæroidis, quæ dimidia maior est, cẽtrum grauitatis in axe consistere.

Data enim qualibet maiori portiõe, quoniã totius sphæræ, uel sphæroidis grauitatis centrum est in axe; est autem & in axe centrum portionis minoris: reliquæ portionis uidelicet maioris centrum in axe necessario consistet.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII.

Cuiuslibet pyramidis triã gularem basim habẽtis grauitatis centrum est in puncto, in quo ipsius axes conueniunt.

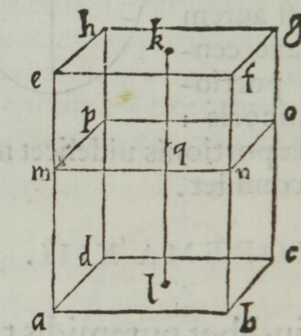



Sit pyramis, cuius basis triangulum a b c, axis d e: sitq; trianguli b d c grauitatis centrum f: & iungatur a f. erit & a f axis eiusdem pyramidis ex tertia diffinitione huius. Itaque quoniam centrum grauitatis est in axe d e; est autem & in axe a f; quod proxime demonstraui

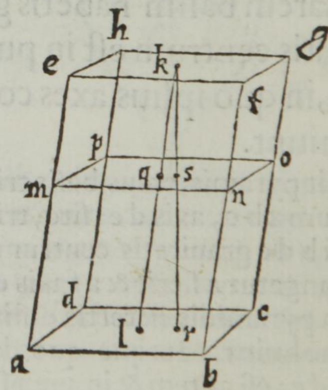
mus: erit utique grauitatis centrum pyramidis punctum g: in quo scilicet ipsi axes conueniunt.

## THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVIII.

Si solidum parallelepipedum secetur plano basibus æquidistante; erit solidum ad solidum, sicut altitudo ad altitudinem, uel sicut axis ad axem.




Sit solidum parallelepipedum a b c d e f g h, cuius axis k l: seceturq; plano basibus æquidistante, quod faciat sectionem m n o p; & axi in puncto q occurrat. Dico solidum g m ad solidum m c eam proportionem habere, quam altitudo solidi g m habet ad solidi m c altitudinem; uel quam axis k q ad axem q l. Si enim axis K l ad basis planum sit perpendicularis, & linea g c, quæ ex quinta huius ipsi k l æquidistat, perpendicularis erit ad idẽ planum, & solidi altitudinem dimetietur. Itaque solidum g m ad solidum m c eam proportionem habet, quam parallelogrammũ g n ad parallelogrammum n c, hoc est quam linea g o, quæ




25. undecimi.

1. sexti.

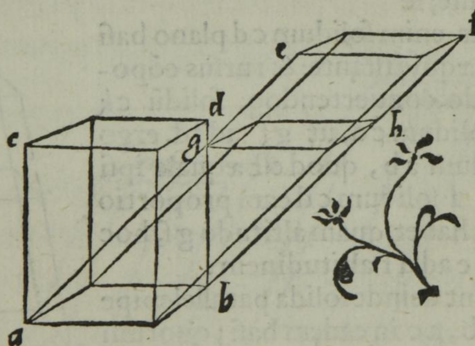
est

est solidi g m altitudo ad o e altitudinem solidi m c, uel quã axis k q ad q l axem. Si uero axis k l non sit perpendicularis ad planum basis; ducatur a puncto K ad idem planum perpendicularis k r, occurrẽs plano m n o p in s. similiter demõstrabimus solidum g m ad solidũ m c ita esse, ut axis k q ad axem q l. Sed ut K q ad q l, ita k s altitudo ad altitudinem s r; nam lineæ K l, K r à planis æquidistantibus in easdem proportiones secantur. 17. undecimi ergo solidum g m ad solidum m c eandẽ proportionem habet, quam altitudo ad altitudinẽ, uel quam axis ad axem. quod demõstrare oportebat.

## THEOREMA XV. PROPOSITIO XIX.

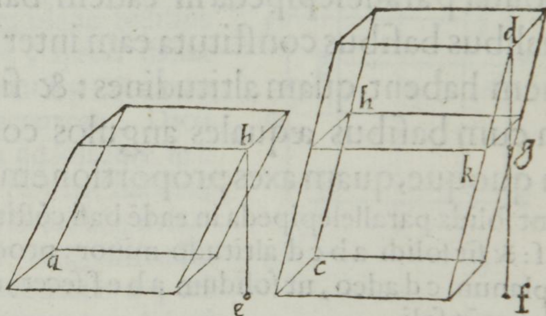
Solida parallelepipeda in eadem basi, uel in æqualibus basibus constituta eam inter se proportionem habent, quam altitudines: & si axes ipsorum cum basibus æquales angulos contineant, eam quoque, quam axes proportionem habebũt.

Sint solida parallelepipeda in eadẽ basi cõstituta a b c d, a b e f: & sit solidi a b c d altitudo minor: producatur autem planum c d adeo, ut solidum a b e f secet; cuius sectio sit g h. erũt solida a b c d, a b g h in eadem basi, & æquali altitudine inter se æqualia. 29. undecimi Quoniã igitur solidum a b e f secatur plano basibus æquidistãte, erit solidum g h e f ad ipsum a b g h 18. huius

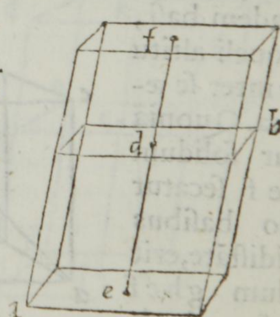


ut altitudo ad altitudinem: & componendo conuertendo
7. quinti. que solidum a b g h, hoc est solidum a b c d ipsi æquale, ad solidum a b e f, ut altitudo solidi a b c d ad solidi a b e f altitudinem.

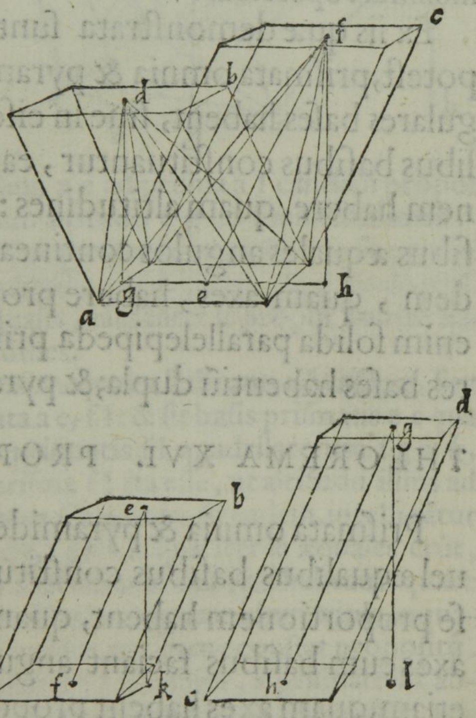
Sint solida parallelepipeda a b, c d in æqualibus basibus constituta: sitq; b e altitudo solidi a b: & solidi c d altitudo d f; quæ quidem maior sit, quàm b e. Dico solidum a b ad solidum c d eandem habere proportionem, quam b e ad d f. abscindatur enim à linea d f æqualis ipsi b e, quæ sit g f: & per g ducatur planum secans solidum c d; quod basibus
31. undecimi æquidistet, faciatq; sectionẽ h K. erunt solida a b, c K æque alta inter se æqualia cũ æquales bases habeant.
18. huius Sed solidũ h d ad solidum c K est, ut altitudo d g ad g f altitudinẽ; secatur enim solidum c d plano basibus æquidistante: & rursus cõponendo, conuertendoq; solidũ c k
7. quinti. ad solidum c d, ut g f ad f d. ergo solidum a b, quod est æquale ipsi c K ad solidum c d eam proportionem habet, quam altitudo g f, hoc est b e ad d f altitudinem.




Sint deinde solida parallelepipeda a b, a c in eadem basi; quorum axes d e, f e cum ipsa æquales angu



los contineant. Dico solidum a b ad solidum a c eãdem habere proportionem, quam axis d e ad axem e f. Si enim axes in eadem recta linea fuerint constituti, hæc duo solida, in unum, atque idem solidum conuenient. quare ex iis, quæ proxime tradita sunt, habebit solidum a b ad solidum a c eandem proportionem, quam axis d e ad e f axem. Si uero axes non sint in eadem recta linea, demittantur a punctis d, f perpendiculares ad basis planum, d g, f h: & iungantur e g, e h. Quoniam igitur axes cum basibus æquales angulos continent, erit d e g angulus æqualis angulo f e h: & sunt anguli ad g h recti, quare & reliquus e d g æqualis erit reliquo e f h: & triangulum d e g triãgulo f e h simile. ergo g d ad d e est, ut h f ad f e: & permutando g d ad h f, ut d e ad e f. Sed solidum a b ad solidum a c eandem proportionem habet, quam d g altitudo ad altitudinẽ f h. ergo & eandẽ habebit, quã axis d e a l e f axẽ.




Postremo sint solida parallelepipeda a b, c d in

æqualibus basibus, quorum axes cum basibus æquales angulos faciant. Dico solidum a b ad solidũ c d ita esse, ut axis e f ad axem g h: nam si axes ad planum basis recti sint, illud perspicue constat: quoniam eadem linea, & axem & solidi altitudinem determinabit. Si uero sint inclinati, à punctis e g ad subiectum planum perpendiculares ducantur e k, g l: & iungantur f k, h l. rursus quoniam axes cum basibus æquales faciunt angulos, eodem modo demonstrabitur, triangulum e f K triangulo g h l simile esse: & e k ad g l, ut e f ad g h. Solidum autem a b ad solidum c d est, ut e K ad g l. ergo & ut axis e f ad axem g h. quæ omnia demonstrare oportebat.

Ex iis quæ demonstrata sunt, facile constare potest, prismata omnia & pyramides, quæ triangulares bases habent, siue in eisdem, siue in æqualibus basibus constituantur, eandem proportionem habere, quam altitudines: & si axes cum basibus æquales angulos contineant, similiter eandem, quam axes, habere proportionem: sunt enim solida parallelepipeda prismatum triangulares bases habentiũ dupla; & pyramidum sextupla.

15. quinti

28. undecimi.

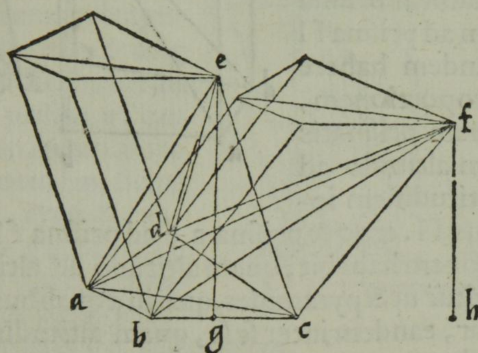
7. duodecimi.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XX.

Prismata omnia & pyramides, quæ in eisdem, uel æqualibus basibus constituuntur, eam inter se proportionem habent, quam altitudines: & si axes cum basibus faciant angulos æquales, eam etiam, quam axes habent proportionem.

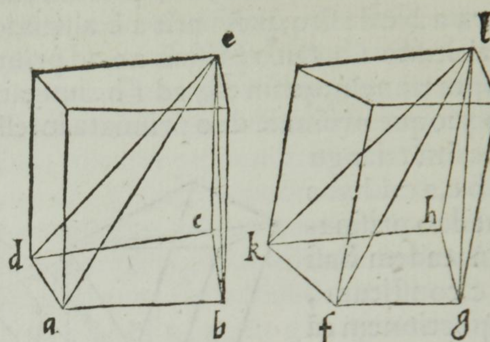
Sint

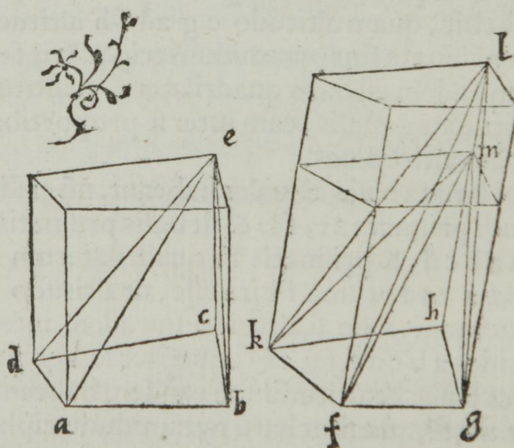
Sint duo prismata a e, a f, quorum eadem basis quadrilatera a b c d: sitq; prismatis a e altitudo e g; & prismatis a f altitudo f h. Dico prisma a e ad prisma a f eam habere proportionem, quam e g ad f h. iungatur enim a c: & in unoquoque prismate duo prismata intelligantur, quorum bases sint triangula a b c, a c d. habebunt duo prismata in eadem basi a b c constituta, proportionem eãdem, quam ipsorum altitudines e g, f h, ex iam demonstratis. & similiter alia duo, quæ sunt in basi a c d. quare totum prisma a e ad prisma a f eandem proportionem habebit, quam altitudo e g ad f h altitudinem. 12. quinti Quòd cum prismata sint pyramidum tripla, & ipsæ pyramides, quarum eadem est basis quadrilatera, & altitudo prismatum altitudini æqualis, eam inter se proportionem habebunt, quam altitudines.




Si uero prismata bases æquales habeant, nõ easdem, sint duo eiusmodi prismata a e, f l: & sit basis prismatis a e quadrilaterum a b c d; & prismatis f l quadrilaterum f g h k. Dico prisma a e ad prisma f l ita esse, ut altitudo illius ad huius altitudinem. nam si altitudo sit eadem, intelligãtur duæ pyramides a b c d e, f g h k l. quæ ĩter se æquales erũt, 6. duodecimi cum æquales bases, & altitudinem eandem habeant. quare 15. quinti & prismata a e, f l, quæ sunt harũ pyramidum tripla, æqualia sint necesse est. ex quibus perspicue constat propositũ. Si uero altitudo prismatis f l sit maior, à prismate f l abscindatur prisma f m, quod æque altum sit, atq; ipsum a e.

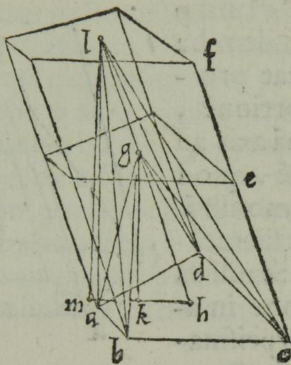
erunt eadem ratione prisſmata a e, f m inter ſe æqualia. quare ſimiliter demonſtrabitur priſma f m ad priſma f l eandem habere proportionem, quam priſmatis f m altitudo ad altitudinem ipſius f l. ergo & priſma a e ad priſma f l eandem proportionem habebit, quam altitudo ad altitudinem. ſequitur igitur ut & pyramides, quæ in æqualibus baſibus conſtituũtur, eandem inter ſe ſe, quam altitudines, proportionem habeant.

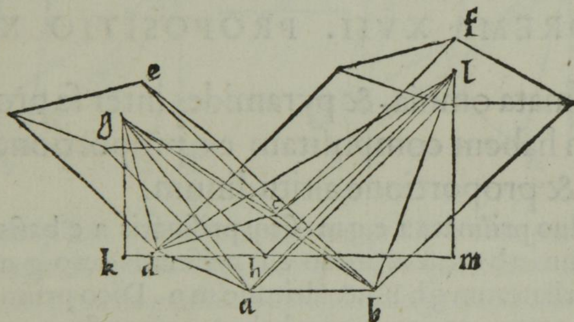



Sint deinde priſmata a e, a f in eadem baſi a b c d; quorũ axes cum baſibus æquales angulos contineant: & ſit priſmatis

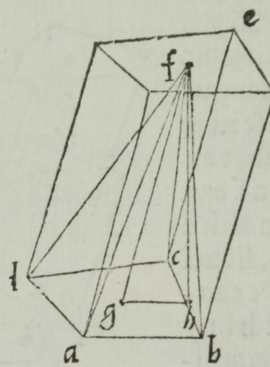
matis a e axis g h; & priſmatis a f axis l h. Dico priſma a e ad priſma a f eam proportionem habere, quam g h ad h l. ducantur à punctis g l perpendiculares ad baſis planum g K, l m: & iungantur k h, h m. Itaque quoniam anguli g h k, l h m ſunt æquales, ſimiliter ut ſupra demonſtrabimus, triangula g h K, l h m ſimilia eſſe; & ut g K ad l m, ita g h ad h l. habet autem priſma a e ad priſma a f eandem proportionem, quam altitudo g K ad altitudinem l m, ſicuti demonſtratum eſt. ergo & eandem habebit, quam g h, ad h l. pyramis igitur a b c d g ad pyramidem a b c d l eandem proportionem habebit, quam axis g h ad h l axem.

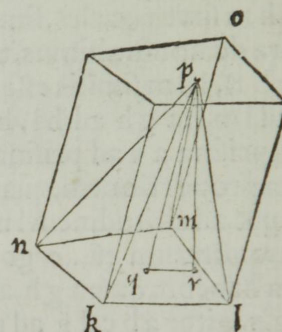



Denique ſint priſmata a e, K o in æqualibus baſibus a b c d, k l m n conſtituta; quorum axes cum baſibus æquales faciant angulos: ſitq; priſmatis a e axis f g, & altitudo f h: priſmatis autem k o axis p q, & altitudo p r. Dico priſma a e ad priſma K o ita eſſe, ut f g ad p q. iunctis enim g h,

q r, eodem, quo supra, modo ostendemus f g ad p q, ut f h ad p r. sed prisma a e ad ipsum κ o est, ut f h ad p r. ergo & ut f g axis ad axem p q. ex quibus fit, ut pyramis a b c d f ad pyramidẽ κ l m n p eandem habeat proportionẽ, quã axis ad axẽ. quod demonstrãdũ fuerat.




Simili ratione in aliis prismatibus & pyramidibus eadem demonstrabuntur.

## THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXI.

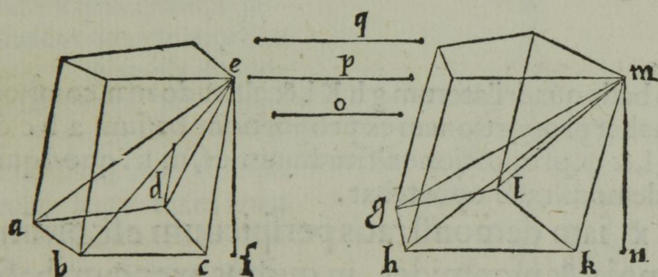
Prismata omnia, & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

Sint duo prismata a e, g m: sitq; prismatis a e basis quadrilaterum a b c d, & altitudo e f: prismatis uero g m basis quadrilaterum g h K l, & altitudo m n. Dico prisma a e ad prisma g m proportionem habere compositam ex proportione basis a b c d ad basim g h k l, & ex proportione altitudinis e f, ad altitudinem m n.

Sint enim primum e f, m n æquales: & ut basis a b c d ad basim g h κ l, ita fiat linea, in qua o ad lineam, in qua p: ut autem e f ad m n, ita linea p ad lineam q. erunt lineæ p q inter se æquales. Itaque prisma a e ad prisma g m eã

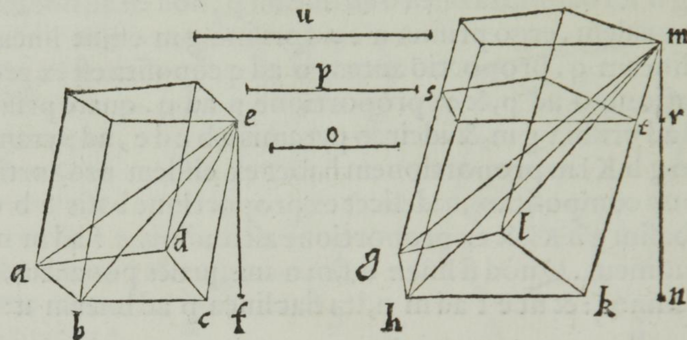
pro

proportionem habet, quam basis a b c d ad basim g h K l: si enim intelligantur duæ pyramides a b c d e, g h k l m, habebunt hæ inter se proportionem eandem, quam ipsarum bases ex sexta duodecimi elementorum. Sed ut basis a b c d ad g h K l basim, ita linea o ad lineam p; hoc est ad lineam q ei æqualem. ergo prisma a e ad prisma g m est, ut linea o ad lineam q. proportio autem o ad q cõposita est ex proportione o ad p, & ex proportione p ad q. quare prisma a e ad prisma g m, & idcirco pyramis a b c d e, ad pyramidem g h K l m proportionem habet ex eisdem proportionibus compositam, uidelicet ex proportione basis a b c d ad basim g h K l, & ex proportione altitudinis e f ad m n altitudinem. Quòd si lineæ e f, m n inæquales ponantur, sit e f minor: & ut e f ad m n, ita fiat linea p ad lineam u: de




inde ab ipsa m n abscindatur r n æqualis e f: & per r ducatur planum, quod oppositis planis æquidistans faciat sectionem s t. erit prisma a e, ad prisma g t, ut basis a b c d ad basim g h k l; hoc est ut o ad p: ut autem prisma g t ad prisma g m, ita altitudo r n; hoc est e f ad altitudinẽ m n; 20.huius
uidelicet linea p ad lineam u. ergo ex æquali prisma a e ad prisma g m est, ut linea o ad ipsam u. Sed proportio o ad u cõposita est ex proportione o ad p, quæ est basis a b c d ad basim g h K l; & ex proportione p ad u, quæ est altitudinis e f ad altitudinem m n. prisma igitur a e ad prisma g m

compoſitam proportionem habet ex proportione baſiũ, & proportione altitudinum. Quare & pyramis, cuius baſis eſt quadrilaterum a b c d, & altitudo e f ad pyramidem,




cuius baſis quadrilaterum g h K l, & altitudo m n, compoſitam habet proportionem ex proportione baſium a b c d, g h k l, & ex proportione altitudinum e f, m n. quod quidem demonſtraſſe oportebat.

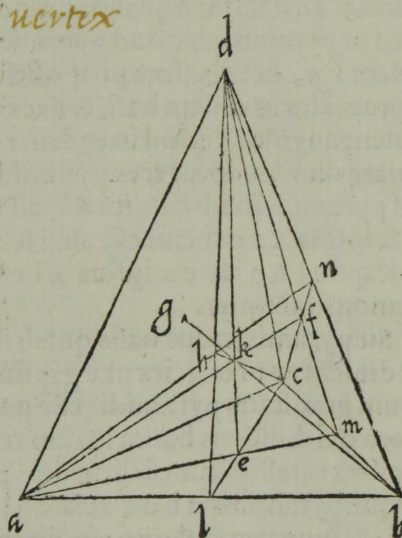
Ex iam demonſtratis perſpicuum eſt, priſmata omnia, & pyramides, in quibus axes cum baſibus æquales angulos continent, proportionem habere compoſitam ex baſium proportione, & proportione axium. demonſttatum eſt enim, axes inter ſe eandem proportionem habere, quam ipſæ altitudines.

## THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXII.

Cvivslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, uel

uel coni portionis axis à centro grauitatis ita diui ditur, ut pars, quæ terminatur ad uerticem reliquæ partis, quæ ad basim, sit tripla.

Sit pyramis, cuius basis triangulum a b c; axis d e; & grauitatis centrum K. Dico lineam d k ipsius K e triplam esse. trianguli enim b d c centrum grauitatis sit punctum f; triãguli a d c centrũ g; & trianguli a d b sit h: & iungantur a f, b g, c h. Quoniam igitur centrũ grauitatis pyramidis in axe cõsistit: suntq; d e, a f, b g, c h eiusdẽ pyramidis axes: conueniunt omnes in idẽ punctũ k, quod est grauitatis centrum. 17. huius
Itaque animo concipiamus hanc pyramidem diuisam in quatuor pyramides, quarum bases sint ipsa pyramidis triangula; & axis punctum k quæ quidem pyramides inter se æquales sunt, ut demõstrabitur. Ducatur enĩ per lineas d c, d e planum secãs, ut sit ipsius, & basis a b c cõmunis sectio recta linea c e l: eiusdẽ uero & triãguli a d b sit linea d h l. erit linea a l æqualis ipsi l b: nam centrum grauitatis trianguli consistit in linea, quæ ab angulo ad dimidiam basim perducitur, ex tertia decima Archimedis. quare triangulum a c l æquale 1. sexti.




est triangulo b c l: & propterea pyramis, cuius basis triangulum a c l, uertex d, est æqualis pyramidi, cuius basis b c l triangulum, & idem uertex. pyramides enim, quæ ab eodẽ 5. duodecimi.

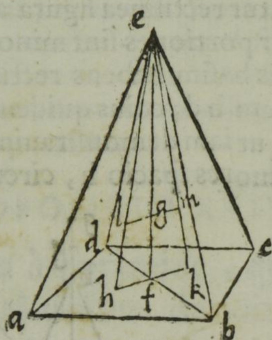
ſunt uertice, eandem proportionem habent, quam ipſarũ baſes. eadem ratione pyramis a c l k pyramidi b c l k: & pyramis a d l k ipſi b d l k pyramidi æqualis erit. Itaque ſi à pyramide a c l d auferantur pyramides a c l k, a d l k: & à pyramide b c l d auferãtur pyramides b c l k, d b l K: quæ relinquuntur erunt æqualia. æqualis igitur eſt pyramis a c d k pyramidi b c d K. Rurſus ſi per lineas a d, d e ducatur planum quod pyramidem ſecet: ſitq; eius & baſis communis ſectio a e m: ſimiliter oſtendetur pyramis a b d K æqualis pyramidi a c d k. ducto denique alio plano per lineas c a, a f: ut eius, & trianguli c d b communis ſectio ſit c f n, pyramis a b c k pyramidi a c d k æqualis demonſtrabitur. cũ ergo tres pyramides b c d k, a b d k, a b c k uni, & eidem pyramidi a c d k ſint æquales, omnes inter ſe ſe æquales erũt. Sed ut pyramis a b c d ad pyramidem a b c k, ita d e axis ad axem k e, ex uigeſima propoſitione huius: ſunt enim hæ pyramides in eadem baſi, & axes cum baſibus æquales continent angulos, quòd in eadem recta linea conſtituantur. quare diuidendo, ut tres pyramides a c d k, b c d K, a b d K ad pyramidem a b c K, ita d k ad K e. conſtat igitur lineam d K ipſius K e triplam eſſe. ſed & a k tripla eſt K f: itemque b K ipſius K g: & c k ipſius k l tripla. quod eodem modo demonſtrabimus.

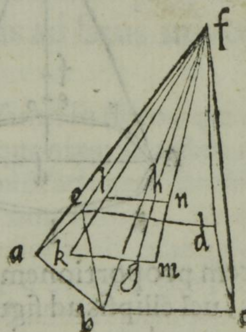
Sit pyramis, cuius baſis quadrilaterum a b c d; axis e f: & diuidatur e f in g, ita ut e g ipſius g f ſit tripla. Dico centrum grauitatis pyramidis eſſe punctum g. ducatur enim linea b d diuidens baſim in duo triangula a b d, b c d: ex quibus intelligãtur cõſtitui duæ pyramides a b d e, b c d e: ſitque pyramidis a b d e axis e h; & pyramidis b c d e axis e K: & iungatur h K, quæ per f tranſibit: eſt enim in ipſa h K centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ ex triangulis a b d, b c d, hoc eſt ipſius quadrilateri. Itaque centrum grauitatis pyramidis a b d e ſit punctum l: & pyramidis b c d e

2. ſexti. ſit m. ducta igitur l m ipſi h m lineæ æquidiſtabit: nam e l ad

l h

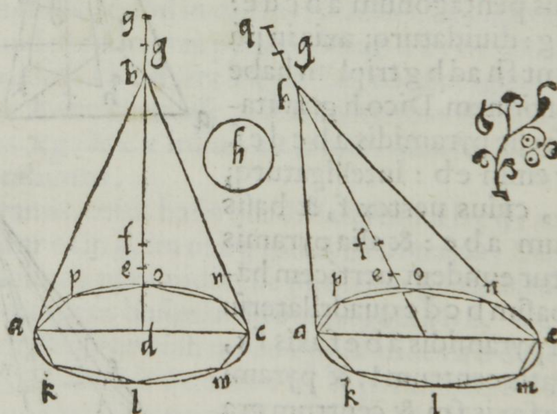
l h eandem habet proportionem, quam c m ad m k, uidelicet triplam. quare linea l m ipsam e f secabit in puncto g: etenim e g ad g f est, ut e l ad l h. præterea quoniam h k, l m æquidistant, erunt triangula h e f, l e g similia: itemq; inter se similia f e k, g e m: & ut e f ad e g, ita h f ad l g: & ita f k ad g m. ergo ut h f ad l g, ita f k ad g m: & permutando ut h f ad f k, ita l g ad g m. sed cum h sit centrum trianguli a b d; & k triãguli b c d: punctũ uero f totius quadrilateri a b c d centrum: erit ex 8. Archimedis de centro grauitatis planorum h f ad f k, ut triangulum b c d ad triangulum a b d: ut autem b c d triangulum ad triangulum a b d, ita pyramis b c d e ad pyramidem a b d e. ergo linea l g ad g m erit, ut pyramis b c d e ad pyramidẽ a b d e. ex quo sequitur, ut totius pyramidis a b c d e punctum g sit grauitatis centrum. Rursus sit pyramis basim habens pentagonum a b c d e: & axem f g: diuidaturq; axis in pũcto h, ita ut f h ad h g triplam habeat proportionem. Dico h grauitatis centrũ esse pyramidis a b c d e f. iungatur enim e b: intelligaturq; pyramis, cuius uertex f, & basis triangulum a b e: & alia pyramis intelligatur eundem uerticem habens, & basim b c d e quadrilaterũ: sit autem pyramidis a b e f axis f k, & grauitatis centrum l: & pyramidis b c d e f axis f m, & centrum grauitatis n: iunganturq; k m, l n; quæ per puncta g h transibunt. Rursus eodem modo, quo supra, demonstrabimus lineas k g m, l h n sibi ipsis æquidistare:



& denique punctum h pyramidis a b c d e f grauitatis esse centrum, & ita in aliis.

Sit conus, uel coni portio axem habens b d: seceturque plano per axem, quod sectionem faciat triangulum a b c: & b d axis diuidatur in e, ita ut b e ipsius e d sit tripla. Dico punctum e coni, uel coni portionis, grauitatis esse centrum. Si enim fieri potest, sit centrum f: & producatur e f extra figuram in g. quam uero proportionem habet g e ad e f, habeat basis coni, uel coni portionis, hoc est circulus, uel ellipsis circa diametrum a c ad aliud spacium, in quo h. Itaque in circulo, uel ellipsi plane describatur rectilinea figura a k l m c n o p, ita ut quæ relinquũtur portiones sint minores spacio h: & intelligatur pyramis basim habens rectilineam figuram a K l m c n o p, & axem b d; cuius quidem grauitatis centrum erit punctum e, ut iam demonstrauimus. Et quoniam portiones sunt minores spacio h, circulus, uel ellipsis ad portiones ma-




iorem proportionem habet, quam g e ad e f. sed ut circulus, uel ellipsis ad figuram rectilineam sibi inscriptam, ita conus, uel coni portio ad pyramidem, quæ figuram rectilineam pro basi habet; & altitudinem æqualem: etenim supra

pra demonstratum est, ita esse cylindrum, uel cylindri portionem ad prisma, cuius basis rectilinea figura, & æqualis altitudo. ergo per conuersionem rationis, ut circulus, uel ellipsis ad portiones, ita conus, uel coni portio ad portiones solidas. quare conus uel coni portio ad portiones solidas maiorem habet proportionem, quam g e ad e f: & diuidendo, pyramis ad portiones solidas maiorem proportionem habet, quam g f ad f e. fiat igitur q f ad f e ut pyramis ad dictas portiones. Itaque quoniam à cono uel coni portione, cuius grauitatis centrum est f, aufertur pyramis, cuius centrum e; reliquæ magnitudinis, quæ ex solidis portionibus constat, centrum grauitatis erit in linea e f protracta, & in puncto q. quod fieri non potest: est enim centrum grauitatis intra. Constat igitur coni, uel coni portionis grauitatis centrum esse punctum e. quæ omnia demonstrare oportebat. 8. huius

## THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXIII.

QVODLIBET frustum à pyramide, quæ triangularem basim habeat, abscissum, diuiditur in tres pyramides proportionales, in ea proportione, quæ est lateris maioris basis ad latus minoris ipsi respondens.

Hoc demonstrauit Leonardus Pisanus in libro, qui de praxi geometriæ inscribitur. Sed quoniam is adhuc impressus non est, nos ipsius demonstrationem breuiter perstringemus, rem ipsam secuti, non uerba. Sit frustum pyramidis a b c d e f, cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f: & iunctis a e, e c, c d, per lineas a e, e c ducatur planum secans frustum: itemque per lineas e c, c d; & per c d, d a alia plana ducantur, quæ diuident frustum in tres pyramides a b c e, a d c e, d e f c.

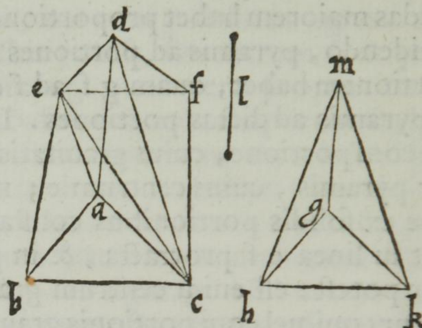
Dico eas proportionales esse in proportione, quæ est lateris a b ad latus d e, ita ut earum maior sit a b c e, media a d c e, & minor d e f c. Quoniam enim lineæ d e, a b æquidistant; & inter ipsas sunt triangula a b e, a d e;

8.sexti. erit triangulum a b c ad triangulum a d e, ut linea a b ad lineam d e. ut autem triangulum a b e ad triangu-

5.duodecimi. lum a d e, ita pyramis a b e c ad pyramidem a d e c: habent enim altitudinem eandem, quæ est à puncto c ad planum, in quo qua-

11.quinti. drilaterum a b e d. ergo ut a b ad d e, ita pyramis a b e c ad pyramidem a d e c. Rursus quoniam æquidistantes sunt a c, d f; erit eadem

4 sexti. ratione pyramis a d c e ad pyramidem c d f e, ut a c ad d f. Sed ut a c ad d f, ita a b ad d e, quoniam triangula a b c, d e f similia sunt, ex nona huius. quare ut pyramis a b c e ad pyramidem a d c e, ita pyramis a d c e ad ipsam d e f c. frustum igitur a b c d e f diuiditur in tres pyramides proportionales in ea proportione, quæ est lateris a b ad d e latus, & earum maior est c a b e, media a d c e, & minor d e f c. quod demonstrare oportebat.




## PROBLEMA V. PROPOSITIO XXIIII.

QVODLIBET frustum pyramidis, uel coni, uel coni portionis, plano basi æquidistanti ita secare, ut sectio sit proportionalis inter maiorem, & minorem basim.

SIT frustum pyramidis a e, cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f: & oporteat ipsum plano, quod basi æquidistet, ita secare, ut sectio sit proportionalis inter triangula a b c, d e f. Inueniatur inter lineas a b, d e media proportionalis, quæ sit b g: & à puncto g erigatur g h æquidistans b e, secansq; a d in h: deinde per h ducatur planum basibus æquidistans, cuius sectio sit triangulum h k l. Dico triangulum h K l proportionale esse inter triangula a b c, d e f, hoc est triangulum a b c ad triangulum h K l eandem habere proportionem, quam triãgulum h K l ad ipsum d e f. Quoniã enim lineæ a b, h K æquidistantium planorum sectiones inter se æquidistant: atque æquidistant b k, g h: linea h k ipsi g b est æqualis: & propterea proportionalis inter a b, d e. quare ut a b ad h K, ita est h K ad d e. fiat ut h k ad d e, ita d e ad aliam lineam, in qua sit m. erit ex æquali ut a b ad d e, ita h k ad m. Et quoniam triangula a b c, h K l, d e f similia sunt; triangulũ a b c ad triangulum h K l est, ut linea a b ad lineam d e: triangulũ autem h K l ad ipsum d e f est, ut h k ad m. ergo triangulum a b c ad triangulum h k l eandem proportionem habet, quam triangulum h K l ad ipsum d e f. Eodem modo in aliis frustis pyramidis idem demonstrabitur.

16. undecimi

34. primi

9. huius corol.

20. sexti

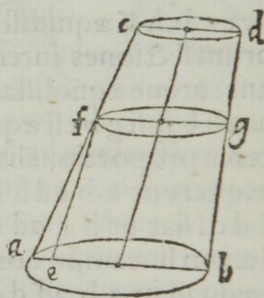
11. quinti



Sit frustum coni, uel coni portionis a d: & secetur plano per axem, cuius sectio sit a b c d, ita ut maior ipsius basis sit circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa c d. Rursus inter lineas a b, c d inueniatur proportionalis b e: & ab e ducta e f æquidistante b d, quæ lineam c a in f secet,

per f planum basibus æquidistans ducatur, ut sit sectiō circulus, uel ellipsis circa diametrum f g. Dico sectionem a b ad sectionem f g eandem proportionem habere, quam f g ad ipsam c d. Simili enim ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum a b ad quadratum f g ita esse, ut quadratū f g ad c d quadratum. Sed circuli inter se eandem proportionem habent, quam diametrorum quadrata. ellipses autem circa a b, f g, c d, quæ similes sunt, ut ostendimus in cōmentariis in principium libri Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus, eam habēt proportionem, quam quadrata diametrorum, quæ eiusdem rationis sunt, ex corollaio septimæ propositionis eiusdem libri. ellipses enim nunc appello ipsa spacia ellipsibus contenta. ergo circulus, uel ellipsis a b ad circulū, uel ellipsim f g eam proportionem habet, quam circulus, uel ellipsis f g ad circulum uel ellipsim c d. quod quidem faciendum proposuimus.

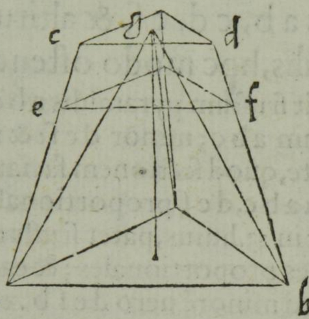
2. duodecimi

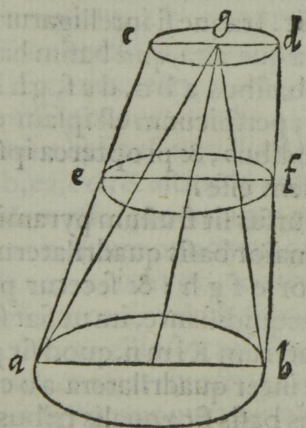



## THEOREMA XX. PROPOSITIO XXV.

QVODLIBET frustum pyramidis, uel coni, uel coni portionis ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem, cuius basis eadem est, & æqualis altitudo, eandem proportionē habet, quam utræque bases, maior, & minor simul sumptæ vnà cū ea, quæ inter ipsas sit proportionalis, ad basim maiorem.

SIT frustũ pyramidis, uel coni, uel coni portionis a d, cuius maior basis a b, minor c d. & secetur altero plano basi æquidistante, ita ut sectio e f sit proportionalis inter bases a b, c d. constituatur autẽ pyramis, uel conus, uel coni portio a g b, cuius basis sit eadem, quæ basis maior frusti, & altitudo æqualis. Dico frustum a d ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem a g b eandem proportionẽ habere, quã utræque bases, a b, c d unà cum e f ad basim a b. est enim frustum a d æquale pyramidi, uel cono, uel coni portioni, cuius basis ex tribus basibus a b, e f, c d constat; & altitudo ipsius altitudini est æqualis: quod mox ostendemus. Sed pyramides, coni, uel coni portiões, quæ sunt æquali altitudine, eãdem inter se, quam bases, proportionem habent, sicuti demonstratum est, partim ab Euclide in duodecimo libro elementorum, partim à nobis in cõmentariis in undecimam propositionẽ Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus. quare pyramis, uel conus, uel coni portio, cuius basis est tribus illis basibus æqualis ad a g b eam habet proportionem, quam bases a b, e f, c d ad a b basim. Frustum igitur a d ad a g b



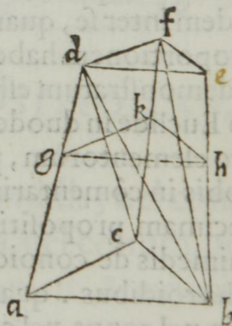




6.11. duodecimi

pyramidem, uel conum, uel coni portionem eandem proportionem habet, quam baſes a b, c d unà cum e f ad baſim a b. quod demonſtrare uolebamus.

Fruſtum uero a d æquale eſſe pyramidi, uel cono, uel coni portioni, cuius baſis conſtat ex baſibus a b, c d, e f, & altitudo fruſti altitudini eſt æqualis, hoc modo oſtendemus.

Sit fruſtum pyramidis a b c d e f, cuius maior baſis triangulum a b c; minor d e f: & ſecetur plano baſibus æquidiſtante, quod ſectionem faciat triangulum g h k inter triangula a b c, d e f proportionale. Iam ex iis, quæ demonſtrata ſunt in 23. huius, patet fruſtum a b c d e f diuidi in tres pyramides proportionales; & earum maiorem eſſe pyramidẽ a b c d minorẽ uero d e f b. ergo pyramis à triangulo g h k conſtituta, quæ altitudinem habeat fruſti altitudini æqualem, proportionalis eſt inter pyramides a b c d, d e f b: & idcirco fruſtum a b c d e f tribus dictis pyramidibus æquale erit. Itaque ſi intelligatur alia pyramis æque alta, quæ baſim habeat ex tribus baſibus a b c, d e f, g h k conſtantem; perſpicuum eſt ipſam eiſdem pyramidibus, & propterea ipſi fruſto æqualem eſſe.




Rurſus ſit fruſtum pyramidis a g, cuius maior baſis quadrilaterum a b c d, minor e f g h: & ſecetur plano baſibus æquidiſtante, ita ut fiat ſectio quadrilaterum K l m n, quod ſit proportionale inter quadrilatera a b c d, e f g h. Dico pyramidem, cuius baſis ſit æqualis tribus quadrilateris a b c d, k l m n, e f g h, & altitudo æqualis altitudini fruſti, ipſi fruſto a g æqualem eſſe. Ducatur enim planum per lineas f b, h d,

quod

quod diuidat frustum in duo frusta triangulares bases habentia, uidelicet in frustum a b d e f h, & in frustū b c d f g h. erit triangulum k l n proportionale inter triangula a b d, e f h: & triangulum l m n proportionale inter b c d, f g h. sed pyramis æque alta, cuius basis constat ex tribus triangulis a b d, k l n, e f h, demonstrata est frusto a b d e f h æqualis: & similiter pyramis, cuius basis constat ex triangulis b c d, l m n, f g h æqualis frusto b c d f g h: componuntur autem tria quadrilatera a b c d, k l m n, e f g h è sex triangulis iam dictis. pyramis igitur basim habens æqualem tribus quadrilateris, & altitudinem eandem ipsi frusto a g est æqualis. Eodem modo illud demōstrabitur in aliis eiusmodi frustis.

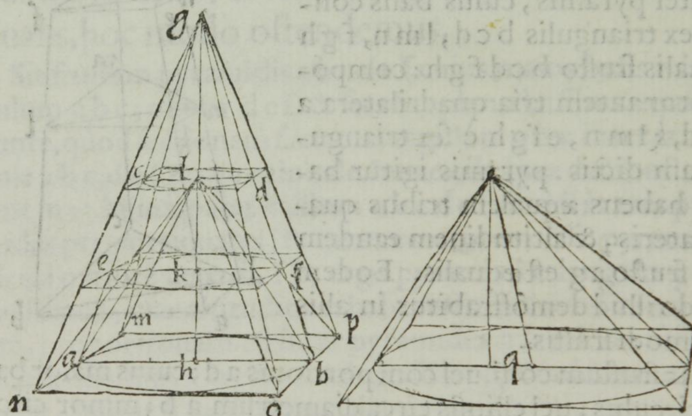
Sit frustum coni, uel coni portionis a d; cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa c d: & secetur plano, quod basibus æquidistet, faciatq; sectionem circulum, uel ellipsim circa diametrum e f, ita ut inter circulos, uel ellipses a b, c d sit proportionalis. Dico conum, uel coni portionem, cuius basis est æqualis tribus circulis, uel tribus ellipsibus a b, e f, c d; & altitudo eadem, quæ frusti a d, ipsi frusto æqualem esse. producatur enim frusti superficies quousque coeat in unum punctum, quod sit g: & coni, uel coni portionis a g b axis sit g h, occurrens planis a b, e f, c d in punctis h k l: circa circulum uero describatur quadratum m n o p, & circa ellipsim rectangulū m n o p, quod ex ipsius diametris constat: iunctisq; g m, g n, g o, g p, ex eodem uertice intelligatur pyramis basim habens dictum quadratum, uel rectangulum: & plana in quibus sunt circuli, uel ellipses e f, c d usque ad eius latera

producantur. Quoniam igitur pyramis secatur planis basi æquidistantibus, sectiones similes erunt: atque erunt quadrata, uel rectangula circa circulos, uel ellipses descripta, quemadmodum & in ipsa basi. Sed cum circuli inter se eã proportionem habeant, quam diametrorum quadrata: itemq; ellipses eam quam rectangula ex ipsarum diametris constantia: & sit circulus, uel ellipsis circa diametrum e f

9. huius

2. duodecimi.

7. de conoidibus & sphæroidibus




proportionalis inter circulos, uel ellipses a b, c d; erit rectangulum e f etiam inter rectangula a b, c d proportionale: per rectangulum enim nunc breuitatis causa etiã ipsum quadratum intelligemus. quare ex iis, quæ proxime dicta sunt, pyramis basim habens æqualem dictis rectangulis, & altitudinem eandem, quam frustum a d, ipsi frusto à pyramide abscisso æqualis probabitur. ut autem rectangulum c d ad rectangulũ e f, ita circulus, uel ellipsis c d ad e f circulum, uel ellipsim: componendoq; ut rectangula c d, e f, ad e f rectangulum, ita circuli, uel ellipses c d, e f, ad e f: & ut rectangulum e f ad rectangulum a b, ita circulus, uel ellipsis e f ad a b circulum, uel ellipsim. ergo ex æquali, & componendo, ut rectãgula c d, e f, a b ad ipsum a b, ita circuli,

culi, uel ellipſes c d, e f a b ad circulum, uel ellipſim a b. Intelligatur pyramis q baſim habens æqualem tribus rectangulis a b, e f, c d; & altitudinem eãdem, quam fruſtum a d. intelligatur etiam conus, uel coni portio q, eadem altitudine, cuius baſis ſit tribus circulis, uel tribus ellipſibus a b, e f, c d æqualis. poſtremo intelligatur pyramis a l b, cuius baſis ſit rectangulum m n o p, & altitudo eadem, quæ fruſti: itemq; intelligatur conus, uel coni portio a l b, cuius baſis circulus, uel ellipſis circa diametrum a b, & eadem altitudo. ut igitur rectangula a b, e f, c d ad rectangulum a b, ita pyramis q ad pyramidem a l b; & ut circuli, uel ellipſes a b, e f, c d ad a b circulum, uel ellipſim, ita conus, uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b. conus igitur, uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b eſt, ut pyramis q ad pyramidem a l b. ſed pyramis a l b ad pyramidem a g b eſt, ut altitudo ad altitudinem, ex 20. huius: & ita eſt conus, uel coni portio a l b ad conum, uel coni portionem a g b ex 14. duodecimi elementorum, & ex iis, quæ nos demonſtrauimus in commentariis in undecimam de conoidibus, & ſphæroidibus, propoſitione quarta. pyramis autem a g b ad pyramidem c g d proportionem habet compoſitam ex proportione baſium & proportione altitudinum, ex uigeſima prima huius: & ſimiliter conus, uel coni portio a g b ad conum, uel coni portionem c g d proportionem habet compoſitã ex eiſdem proportionibus, per ea, quæ in dictis commentariis demonſtrauimus, propoſitione quinta, & ſexta: altitudo enim in utriſque eadem eſt, & baſes inter ſe ſe eandem habent proportionem. ergo ut pyramis a g b ad pyramidem c g d, ita eſt conus, uel coni portio a g b ad a g d conum, uel coni portionem: & per conuerſionẽ rationis, ut pyramis a g b ad fruſtũ à pyramide abſciſſum, ita conus uel coni portio a g b ad fruſtum a d. ex æquali igitur, ut pyramis q ad fruſtum à pyramide abſciſſum, ita conus uel coni portio q ad

6. 11. duodecimi

frustum a d. Sed pyramis q æqualis est frusto à pyramide abscisso, ut demonstrauimus. ergo & conus, uel coni portio q, cuius basis ex tribus circulis, uel ellipsibus a b, e f, c d constat, & altitudo eadem, quæ frusti: ipsi frusto a d est æqualis. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXVI.

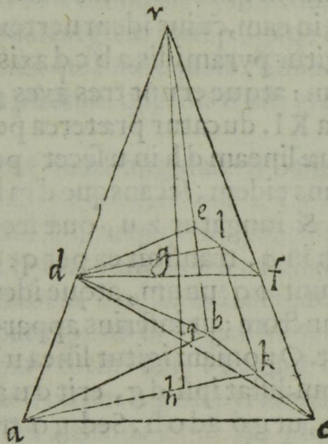
Cuiuslibet frusti à pyramide, uel cono, uel coni portione abscissi, centrum grauitatis est in axe, ita ut eo primum in duas portiones diuiso, portio superior, quæ minorem basim attingit ad portionem reliquam eam habeat proportionem, quam duplum lateris, uel diametri maioris basis, unà cum latere, uel diametro minoris, ipsi respondente, habet ad duplum lateris, uel diametri minoris basis unà cũ latere, uel diametro maioris: deinde à puncto diuisionis quarta parte superioris portionis in ipsa sumpta: & rursus ab inferioris portionis termino, qui est ad basim maiorem, sumpta quarta parte totius axis: centrum sit in linea, quæ his finibus continetur, atque in eo lineæ puncto, quo sic diuiditur, ut tota linea ad partem propinquiorem minori basi, eãdem proportionem habeat, quam frustum ad pyramidẽ, uel conum, uel coni portionem, cuius basis sit eadem, quæ basis maior, & altitudo frusti altitudini æqualis.

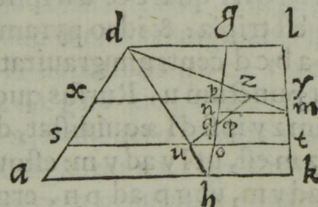
sit

Sit frustum a e a pyramide, quæ triangularem basim habeat abscissum: cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f; & axis g h. ducto autem plano per axem & per lineã d a, quod sectionem faciat d a k l quadrilaterum; puncta K l lineas b c, e f bifariam secabunt. nam cum g h sit axis frusti: erit h centrum grauitatis trianguli a b c: & g centrum trianguli d e f: centrum uero cuiuslibet trianguli est in recta linea, quæ ab angulo ipsius ad dimidiã basim ducitur ex decimatertia primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorum. quare centrũ grauitatis trapezii b c f e est in linea K l, quod sit m: & à puncto m ad axem ducta m n ipsi a k, uel d l æquidistante; erit axis g h diuisus in portiones g n, n h, quas diximus: eandem enim proportionem habet g n ad n h, quã l m ad m k. At l m ad m K habet eam, quã duplum lateris maioris basis b c unà cum latere minoris e f ad duplum lateris e f unà cum latere b c, ex ultima eiusdem libri Archimedis. Itaque à linea n g abscindatur, quarta pars, quæ sit n p: & ab axe h g abscindatur itidem quarta pars h o: & quam proportionem habet frustum ad pyramidem, cuius maior basis est triangulum a b c, & altitudo ipsi æqualis; habeat o p ad p q. Dico centrum grauitatis frusti esse in linea p o, & in puncto q. namque ipsum esse in linea g h manifeste constat. protractis enim frusti pla

3. diffi. huius.

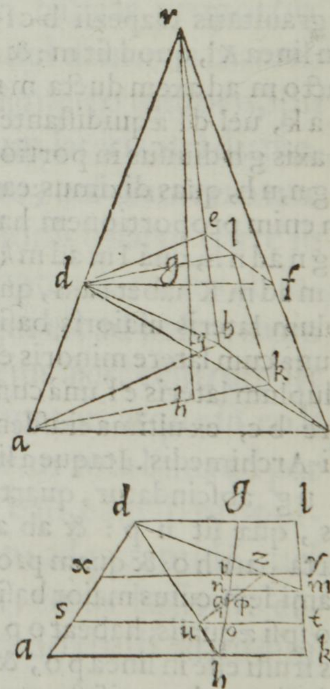
Vltima eiusdẽ libri Archimedis.



nis, quousque in unum punctum r conueniant; erit pyramidis a b c r, & pyramidis d e f r grauitatis centrum in linea r h. ergo & reliquæ magnitudinis, uidelicet frusti centrum in eadem linea necessario comperietur. Iungantur d b, d c, d h, d m: & per lineas d b, d c ducto altero plano intelligatur frustum in duas pyramides diuisum: in pyramidem quidem, cuius basis est triangulum a b c, uertex d: & in eam, cuius idem uertex, & basis trapezium b c f e. erit igitur pyramidis a b c d axis d h, & pyramidis b c f e d axis d m: atque erunt tres axes g h, d h, d m in eodem plano d a K l. ducatur præterea per o linea s t ipsi a K æquidistãs, quæ lineam d h in u secet: per p uero ducatur x y æquidistans eidem, secansque d m in z: & iungatur z u, quæ secet g h in φ. transibit ea per q: & erunt φ q unum, atque idem punctum; ut inferius apparebit. Quoniam igitur linea u o æquidistat ipsi d g, erit d u ad u h, ut g o ad o h. Sed g o tripla est o h. quare & d u ipsius u h est tripla: & ideo pyramidis a b c d centrum grauitatis erit punctum u. Rursus quoniam z y ipsi d l æquidistat, d z ad z m est, ut l y ad y m: estque l y ad y m, ut g p ad p n. ergo d z ad z m est, ut g p ad p n. Quòd cum g p sit tripla p n; erit etiam d z ipsius z m tripla. atque ob eandem caussam punctum z est centrũ grauitatis pyramidis b c f e d. iuncta igitur z u, in ea erit cẽtrum

2. sexti.




gra-

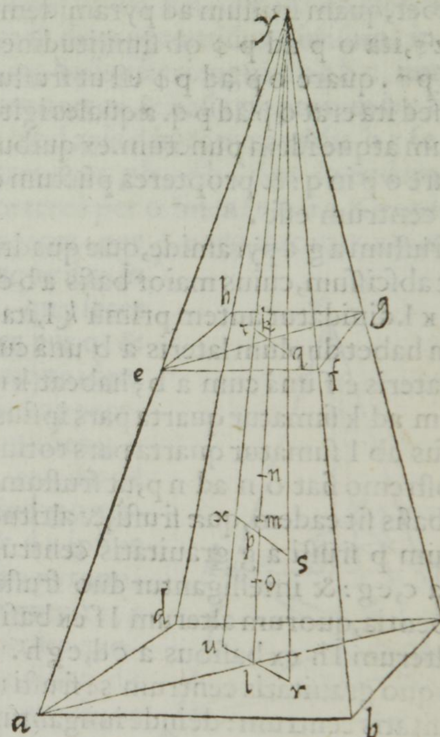
grauitatis magnitudinis, quæ ex utrisque pyramidibus cõstat; hoc est ipsius frusti. Sed frusti centrum est etiam in axe g h. ergo in puncto φ, in quo lineæ z u, g h conueniunt. Itaque u φ ad φ z eam proportionem habet, quam pyramis b c f e d ad pyramidem a b c d. & componendo u z ad z φ eam habet, quam frustum ad pyramidem a b c d. Vt uero u z ad z φ, ita o p ad p φ ob similitudinem triangulorum, u o φ, z p φ. quare o p ad p φ est ut frustum ad pyramidem a b c d. sed ita erat o p ad p q. æquales igitur sunt p φ, p q: & q φ unum atque idem punctum. ex quibus sequitur lineam z u secare o p in q: & propterea pũctum q ipsius frusti grauitatis centrum esse.

8. primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorum

7. quinti.

Sit frustum a g à pyramide, quæ quadrangularem basim habeat abscissum, cuius maior basis a b c d, minor e f g h, & axis k l. diuidatur autem primũ k l, ita ut quam proportionem habet duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b; habeat k m ad m l. deinde à pũcto m ad k sumatur quarta pars ipsius m k, quæ sit m n. & rursus ab l sumatur quarta pars totius axis l k, quæ sit l o. postremo fiat o n ad n p, ut frustum a g ad pyramidẽ, cuius basis sit eadem, quæ frusti, & altitudo æqualis. Dico punctum p frusti a g grauitatis centrum esse. ducantur enim a c, e g: & intelligantur duo frusta triangulares bases habentia, quorum alterum l f ex basibus a b c, e f g cõstet; alterum l h ex basibus a c d, e g h. Sitq; frusti l f axis q r; in quo grauitatis centrum s: frusti uero l h axis t u, & x grauitatis centrum: deinde iungantur u r, t q, x s. transibit u r per l: quoniam l est centrum grauitatis quadranguli a b c d: & puncta r u grauitatis centra triangulorum a b c, a c d; in quæ quadrangulum ipsum diuiditur. eadem quoque ratione t q per punctum k transibit. At uero proportiones, ex quibus frustorum grauitatis centra inquirimus, eædem sunt in toto frusto a g, & in frustis l f, l h. Sunt enim per octauam huius quadrilatera a b c d, e f g h similia:

itemq; similia triangula a b c, e f g: & a c d, e g h. idcirco; latera sibi ipsis respondentia eandem inter se se proportionem seruant. Vt igitur duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b, ita est duplum a d lateris unà cum latere e h ad duplum e h unà cum a d: & ita in aliis. Rursus frustum a g ad pyramidẽ, cuius eadem est basis, & æqualis altitudo eandem proportionẽ habet, quam frustũ l f ad pyramidẽ, quæ est eadẽ basi, & æquali altitudine: & similiter quam l h frustum ad pyramidem, quæ ex eadẽ basi, & æquali altitudine constat. nam si inter ipsas bases mediæ proportionales constituantur, tres bases simul sumptæ ad maiorem basim in omnibus eodem modo se habebunt. Vnde fit, ut axes K l, q r, t u à punctis p s x in eandem proportionem secentur. ergo linea x s per p transibit: & lineæ r u, s x, q t inter se æquidistantes erunt. Itaque cum frusti a g latera producta




2. sexti.

ducta fuerint, ita ut in unum punctum y coeant, erunt triã gala u y l, x y p, t y k inter se similia: & similia etiam triangula l y r, p y s, k y q. quare ut in 19 huius, demonstrabitur x p, ad p s: itemq; t k ad k q eandem habere proportionẽ, quam u l ad l r. Sed ut u l ad l r, ita est triangulum a b c ad triangulum a c d: & ut t k ad K q, ita triangulum e f g ad triangulum e g h. Vt autem triangulum a b c ad triangulum a c d, ita pyramis a b c y ad pyramidem a c d y. & ut triangulum e f g ad triangulum e g h, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y; ergo ut pyramis a b c y ad pyramidẽ a c d y, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y. reliquum igitur frustũ l f ad reliquum frustũ l h est ut pyramis a b c y ad pyramidem a c d y, hoc est ut u l ad l r, & ut x p ad p s. Quòd cum frusti l f centrum grauitatis sit s: & frusti l h sit centrum x: constat punctum p totius frusti a g grauitatis esse centrum. Eodem modo fiet demonstratio etiam in aliis pyramidibus. 19. quinti 8. Archimedis.

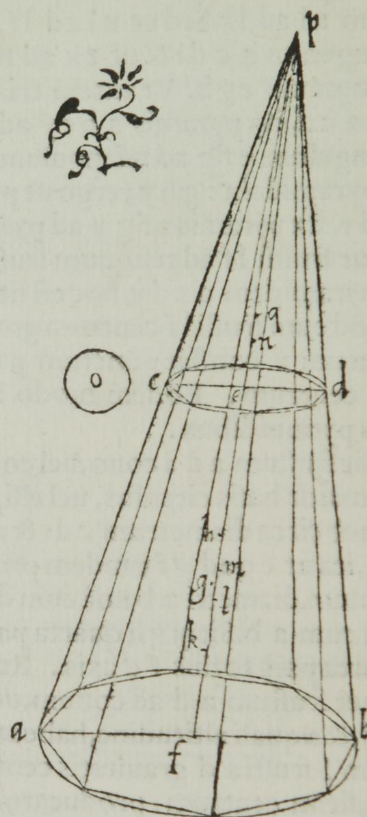
Sit frustum a d à cono, uel coni portione abscissum, cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa diametrum c d: & axis e f. diuidatur autẽ e f in g, ita ut e g ad g f eandem proportionem habeat, quam duplum diametri a b unà cum diametro c d ad duplum c d unà cum a b. Sitq; g h quarta pars lineæ g e: & sit f K item quarta pars totius f e axis. Rursus quam proportionem habet frustum a d ad conum, uel coni portionem, in eadẽ basi, & æquali altitudine, habeat linea K h ad h l. Dico punctum l frusti a d grauitatis centrum esse. Si enim fieri potest, sit m centrum: producaturq; l m extra frustum in n: & ut n l ad l m, ita fiat circulus, uel ellipsis circa diametrũ a b ad aliud spacium, in quo sit o. Itaque in circulo, uel ellipsi circa diametrum a b rectilinea figura plane describatur, ita ut quæ relinquuntur portiones sint o spacio minores: & intelligatur pyramis a p b, basim habens rectilineam figuram in circulo, uel ellipsi a b descriptam: à qua

K

frustum pyramidis sit abscissum. erit ex iis quæ proxime tradidimus, frusti pyramidis a d centrum grauitatis l. Quoniam igitur portiones spacio o minores sunt; habebit circulus, uel ellipsis a b ad portiones dictas maiorē proportionem, quàm n l ad l m. sed ut circulus, uel ellipsis a b ad portiones, ita a p b conus, uel coni portio ad solidas portiones, id quod supra demonstratum est: & ut circulus

22.huius uel ellipsis c d ad portiones, quæ ipsi insunt, ita conus, uel coni portio c p d ad solidas ipsius portiones. Quòd cum figuræ in circulis, uel ellipsibus a b c d descriptæ similes sint, erit proportio circuli, uel ellipsis a b ad suas portiones, eadē, quæ circuli uel ellipsis c d ad suas. ergo conus, uel coni portio a p b ad portiones solidas eādem habet proportionē, quam conus, uel coni portio c p d ad solidas ipsius

19.quinti portiones. reliquum igitur coni, uel coni portionis frustū, scilicet a d ad reliquas portiones solidas in ipso contentas eandem proportionē habet, quam conus, uel coni portio a p b ad solidas portiones: hoc est eandem, quam circulus, uel ellipsis a b ad portiones planas. quare frustum coni, uel coni portionis a d




ad

ad portiones solidas maiorem habet proportionẽ, quàm n l ad l m: & diuidendo frustum pyramidis ad dictas portiones maiorem proportionem habet, quàm n m ad m l. fiat igitur ut frustum pyramidis ad portiones, ita q m ad m l. Itaque quoniam à frusto coni, uel coni portionis a d, cuius grauitatis centrum est m, aufertur frustum pyramidis habens centrum l; erit reliquæ magnitudinis, quæ ex portionibus solidis constat; grauitatis cẽtrum in linea l m producta, atque in puncto q, extra figuram posito: quod fieri nullo modo potest. relinquitur ergo, ut punctum l sit frusti a d grauitatis centrum. quæ omnia demonstranda proponebantur.

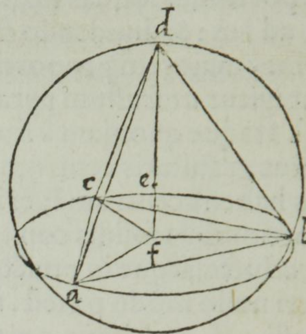
## THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXVII.

OMNIVM solidorum in sphæra descriptorum, quæ æqualibus, & similibus basibus continentur, centrum grauitatis est idem, quod sphæræ centrum.

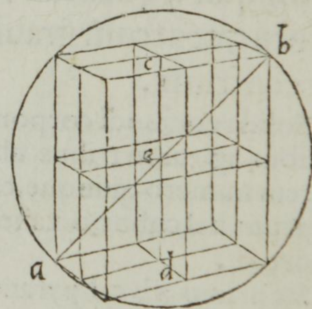
Solida eiusmodi corpora regularia appellare solent, de quibus agitur in tribus ultimis libris elementorum: sunt autem numero quinque, tetrahedrum, uel pyramis, hexahedrum, uel cubus, octahedrum, dodecahedrum, & icosahedrum.

Sit primo a b c d pyramis ĩ sphæra descripta, cuius sphæræ centrum sit e. Dico e pyramidis a b c d grauitatis esse centrum. Si enim iuncta d e producatur ad basim a b c in f; ex iis, quæ demonstrauit Campanus in quartodecimo libro elementorum, propositione decima quinta, & decima septima, erit f centrum circuli circa triangulum a b c descripti: atque erit e f sexta pars ipsius sphæræ axis. quare ex prima huius constat trianguli a b c grauitatis centrum esse punctum f: & idcirco lineam d f esse pyramidis axem.

At cum e f ſit ſexta pars axis ſphæræ, erit d e tripla e f. ergo punctum e eſt grauitatis centrum ipſius pyramidis: quod in uigeſima ſecunda huius demonſtratum fuit. Sed e eſt centrum ſphæræ. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in ſphæra deſcriptæ idem ſit, quod ipſius ſphæræ centrum.



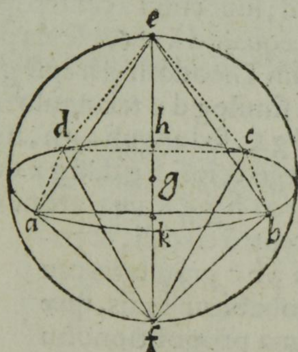

Sit cubus in ſphæra deſcriptus a b, & oppoſitorum planorum lateribus bifariam diuiſis, per puncta diuiſionum plana ducantur, ut communis ipſorum ſectio ſit recta linea c d. Itaque ſi ducatur a b, ſolidi ſcilicet diameter, lineæ a b, c d ex trigeſimanona undecimi ſeſe bifariam ſecabunt. ſecent autem in puncto e. erit e centrũ grauitatis ſolidi a b, id quod demonſtratum eſt in octaua huius. Sed quoniam ab eſt ſphæræ diametro æqualis, ut in decima quinta propoſitione tertii decimi libri elemẽtorum oſtenditur: punctum e ſphæræ quoque centrum erit. Cubi igitur in ſphæra deſcripti grauitatis centrum idem eſt, quod centrum ipſius ſphæræ.




Sit octahedrum a b c d e f, in ſphæra deſcriptum, cuius ſphæræ centrum ſit g. Dico punctum g ipſius octahedri grauitatis centrum eſſe. Conſtat enim ex iis, quæ demonſtrata ſunt à Campano in quinto decimo libro elementorum, propoſitione ſextadecima eiuſmodi ſolidum diuidi in duas pyramides æquales, & ſimiles; uidelicet in pyramidem,

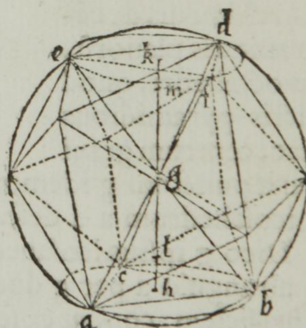
dem,

dem, cuius basis est quadratum a b c d, & altitudo e g: & in pyramidem, cuius eadē basis, altitudoq; f g; ut sint e g, g f semidiametri sphæræ, & linea una. Cū igitur g sit sphæræ centrum, erit etiam centrum circuli, qui circa quadratū a b c d describitur: & propterea eiusdem quadrati grauitatis centrum: quod in prima propositione huius demonstratum est. quare pyramidis a b c d e axis erit e g: & pyramidis a b c d f axis f g. Itaque sit h centrum grauitatis pyramidis a b c d e, & pyramidis a b c d f centrum sit K: perspicuum est ex uigesima secunda propositione huius, lineā e h triplam esse h g: cō ponendoq; e g ipsius g h quadruplam. & eadē ratione f g quadruplā ipsius g K. quod cum e g, g f sint æquales, & h g, g K necessario æquales erunt. ergo ex quarta propositione primi libri Archimedis de cētro grauitatis planorū, totius octahedri, quod ex dictis pyramidibus constat, centrum grauitatis erit punctum g idem, quod ipsius sphæræ centrum.




Sit icosahedrum a d descriptum in sphæra, cuius centrū sit g. Dico g ipsius icosahedri grauitatis esse centrum. Si enim ab angulo a per g ducatur recta linea usque ad sphæræ superficiem; constat ex sexta decima propositione libri tertii decimi elementorum, cadere eam in angulum ipsi a oppositum. cadat in d: sitq; una aliqua basis icosahedri triangulum a b c: & iunctæ b g, c g producantur, & cadant in angulos e f, ipsis b c oppositos. Itaque per triangula a b c, d e f ducantur plana sphæram secantia. erunt hæ se-

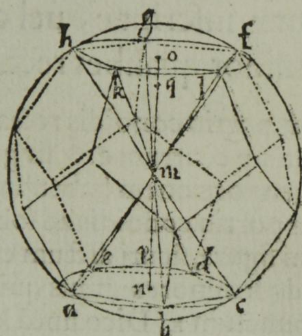
ctiones circuli ex prima propositione sphæricorum Theodosii: unus quidem circa triangulum a b c descriptus: alter uero circa d e f: & quoniam triangula a b c, d e f æqualia sunt, & similia; erunt ex prima, & secunda propositione duodecimi libri elementorum, circuli quoque inter se se æquales. postremo à centro g ad circulum a b c perpendicularis ducatur g h; & alia perpendicularis ducatur ad circulum d e f, quæ sit g k; & iungantur a h, d k. perspicuum est ex corollario primæ sphæricorum Theodosii, punctum h centrum esse circuli a b c, & k centrum circuli d e f. Quoniam igitur triangulorum g a h, g d K latus a g est æquale lateri g d; sunt enim à centro sphæræ ad superficiem: atque est a h æquale d k: & ex sexta propositione libri primi sphæricorum Theodosii g h ipsi g K: triangulum g a h æquale erit, & simile g d k triangulo: & angulus a g h æqualis an-
13. primi gulo d g K. sed anguli a g h, h g d sunt æquales duobus re-
ctis. ergo & ipsi h g d, d g k duobus rectis æquales erunt.
14. primi & idcirco h g, g K una, atque eadem erit linea. cum autem h sit centrũ circuli, & trianguli a b c grauitatis centrũ probabitur ex iis, quæ in prima propositione huius tradita sunt. quare g h erit pyramidis a b c g axis. & ob eandem caussam g k axis pyramidis d e f g. Itaque centrum grauitatis pyramidis a b c g sit pũctum l, & pyramidis d e f g sit m. Similiter ut supra demonstrabimus m g, g l inter se æquales esse, & punctum g grauitatis centrum magnitudinis, quæ ex utrisque pyramidibus constat. eodem modo demonstrabitur, quarumcunque duarum pyramidum, quæ opponuntur, grauitatis centrũ




esse

esse punctum g. Sequitur ergo ut icosahedri centrum grauitatis sit idem, quod ipsius sphæræ centrum.

Sit dodecahedrum a f in sphæra designatum, sitque sphæræ centrum m. Dico m centrum esse grauitatis ipsius dodecahedri. Sit enim pentagonum a b c d e una ex duodecim basibus solidi a f: & iuncta a m producatur ad sphæræ superficiem. cadet in angulum ipsi a oppositum; quod colligitur ex decima septima propositione tertiidecimi libri elementorum. cadat in f. at si ab aliis angulis b c d e per cẽtrum itidem lineæ ducantur ad superficiem sphæræ in puncta g h κ l; cadent hæ in alios angulos basis, quæ ipsi a b c d basi opponitur. transeant ergo per pentagona a b c d e, f g h K l plana sphæram secantia, quæ facient sectiones circulos æquales inter se se: postea ducantur ex centro sphæræ m perpendiculares ad plana dictorum circulorũ; ad circulum quidem a b c d e perpendicularis m n: & ad circulum f g h K l ipsa m o, erunt puncta n o circulorũ centra: & lineæ m n, m o inter se æquales: quòd circuli æquales sint. Eodem modo, quo supra, demonstrabimus lineas m n, m o in unã atque eandem lineam conuenire. ergo cum puncta n o sint centra circulorum, constat ex prima huius & pentagonorũ grauitatis esse centra: idcircoq; m n, m o pyramidum a b c d e m, f g h K l m axes. ponatur a b c d e m pyramidis grauitatis centrum p: & pyramidis f g h κ l m ipsum q centrum. erunt p m, m q æquales, & punctum m grauitatis centrum magnitudinis, quæ ex ipsis pyramidibus constat. eodẽ modo probabitur quarumlibet pyramidum, quæ è regione opponuntur, centrũ




corol. primæ sphæricorum Theod.
6. primi sphæricorum.

grauitatis esse punctum m. patet igitur totius dodecahedri, centrum grauitatis idē esse, quod & sphæræ ipsum comprehendentis centrum. quæ quidem omnia demonstrasse oportebat.

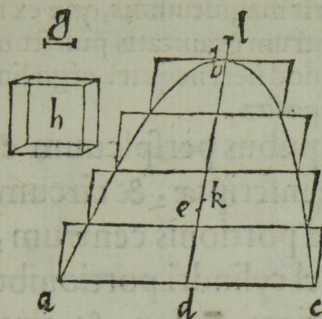
## PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXVIII.

DATA qualibet portione conoidis rectanguli, abscissa plano ad axem recto, uel non recto; fieri potest, ut portio solida inscribatur, uel circumscribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus, æqualem habentibus altitudinem, ita ut recta linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & figuræ inscriptæ, uel circumscriptæ interiicitur, sit minor qualibet recta linea proposita.

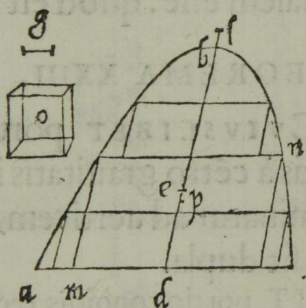
Sit portio conoidis rectanguli a b c, cuius axis b d, grauitatisq; centrum e: & sit g recta linea proposita. quam uero proportionem habet linea b e ad lineam g, eandem habeat portio conoidis ad solidum h: & circumscribatur portioni figura, sicuti dictum est, ita ut portiones reliquæ sint solido h minores: cuius quidem figuræ centrum grauitatis sit punctum k. Dico lineā k e minorem esse linea g proposita. nisi enim sit minor, uel æqualis, uel maior erit. & quo-
8.quinti. niam figura circumscripta ad reliquas portiones maiorem proportionem habet, quàm portio conoidis ad solidum h; hoc est maiorem, quàm b e ad g: & b e ad g non minorem habet proportionem, quàm ad k e, propterea quod k e non ponitur minor ipsa g: habebit figura circumscripta ad portiones reliquas maiorem proportionem quàm b e ad e k:
29.quinti ex traditione Campani. & diuidendo portio conoidis ad reliquas portiones habebit maiorem, quàm b k ad K e. quare si fiat ut portio co-

noidis

noidis ad portiones reliquas, ita alia linea, quæ sit l K ad K e: erit l k maior, quam b k: & ideo punctum l extra portionem cadet. Quoniã igitur à figura circumscripta, cuius grauitatis centrum est k, aufertur portio conoidis, cuius centrum e. habetq; l K ad K e eam proportionem, quam portio conoidis ad reliquas portiones; erit punctum l extra portionem cadẽs, centrum magnitudinis ex reliquis portionibus compositæ. illud autem fieri nullo modo potest. quare constat lineam k e ipsa g linea propositâ minorem esse.




Rursus inscribatur portioni figura, uidelicet cylindrus m n, ut sit ipsius altitudo æqualis dimidio axis b d: & quam proportionem habet b e ad g, habeat m n cylindrus ad solidum o. inscribatur deinde eidem alia figura, ita ut portiones reliquæ sint solido o minores: & centrum grauitatis figuræ sit p. Dico lineam p e ipsa g minorẽ esse. si enim non sit minor, eodem, quo supra modo demonstrabimus figuram inscriptam ad reliquas portiones maiorem proportionem habere, quàm b e ad e p. & si fiat alia linea l e ad e p, ut est figura inscripta ad reliquas portiones, pũctum l extra por



tionem cadet: Itaque cum à portione conoidis, cuius grauitatis centrum e auferatur inſcripta figura, centrum habens p: & ſit l e ad e p, ut figura inſcripta ad portiones reliquas: erit magnitudinis, quæ ex reliquis portionibus conſtat, centrum grauitatis punctum l, extra portionem cadens. quod fieri nequit. ergo linea p e minor eſt ipſa g linea propoſita.

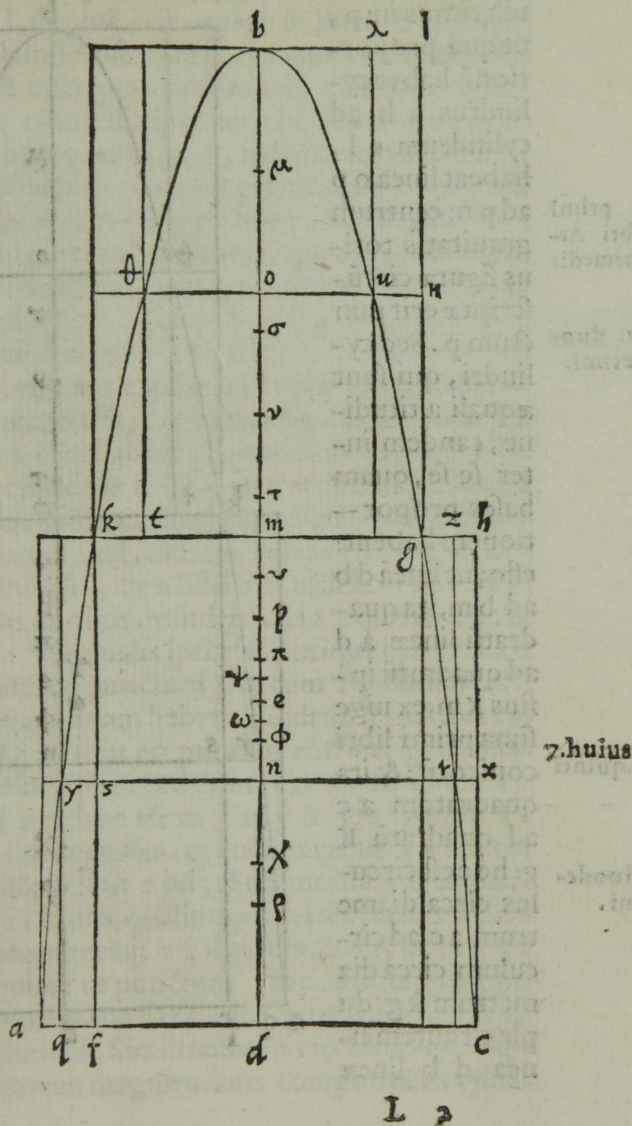
Ex quibus perſpicuum eſt centrum grauitatis figuræ inſcriptæ, & circumſcriptæ eo magis accedere ad portionis centrum, quo pluribus cylindris, uel cylindri portionibus conſtet: fiatq; figura inſcripta maior, & circumſcripta minor. & quanquam continenter ad portionis centrũ propius admoueatur: nunquam tamen ad ipſum perueniet. ſequeretur enim figuram inſcriptam, nõ ſolum portioni, ſed etiam circumſcriptæ figuræ æqualem eſſe. quod eſt abſurdum.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIX.

CVIVSLIBET portionis conoidis rectanguli axis à cẽtro grauitatis ita diuiditur, ut pars quæ terminatur ad uerticem, reliquæ partis, quæ ad baſim ſit dupla.

SIT portio conoidis rectanguli uel abſciſſa plano ad axem recto, uel non recto: & ſecta ipſa altero plano per axẽ ſit ſuperficiei ſectio a b c rectanguli coni ſectio, uel parabole; plani abſcindentis portionem ſectio ſit recta linea a c: axis portionis, & ſectionis diameter b d. Sumatur autem in linea b d punctum e, ita ut b e ſit ipſius e d dupla. Dico e por-

e portionis a b c grauitatis esse centrum. Diuidatur enim b d bifariam in m: & rursus d m, m b bifariam diuidantur in punctis n, o: inscribaturq; portioni figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ut superius dictũ est. Sit autem primum figura inscripta cylĩdrus f g: & circũscripta ex cylindris a h, K l constet. punctum n erit centrum grauitatis figuræ inscriptæ, mediũ scilicet ipsius d m axis: atq; idẽ erit centrum cylindri a h: & cylindri κ l centrũ o, axis b m medium. quare si li




7. huius

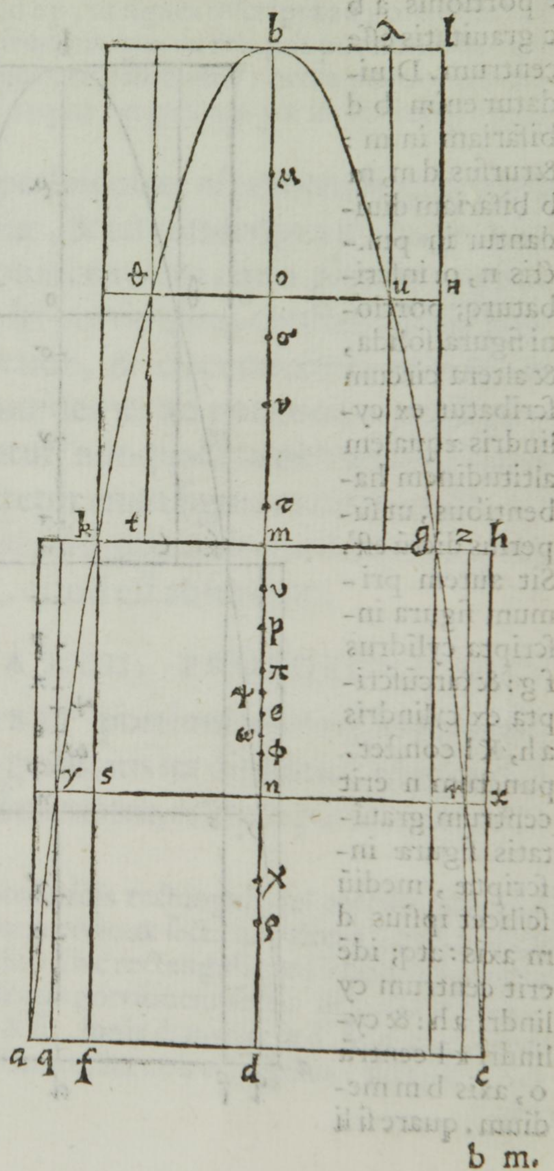
neam o n ita diuiſerimus in p, ut quã proportionẽ habet cylindrus a h ad cylindrum κ l, habeat linea o p ad p n: centrum grauitatis totius figuræ circũſcriptæ erit punctum p. Sed cylindri, qui ſunt æquali altitudine, eandem inter ſe ſe, quam baſes proportionem habent: eſtq; ut linea d b ad b m, ita quadratũ lineæ a d ad quadratũ ipſius κ m, ex uigeſima primi libri conicorũ: & ita quadratum a c ad quadratũ κ g: hoc eſt circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k g. dupla eſt autem linea d b lineæ b m.

8. primi libri Archimedis

11. duodecimi.

15. quinti

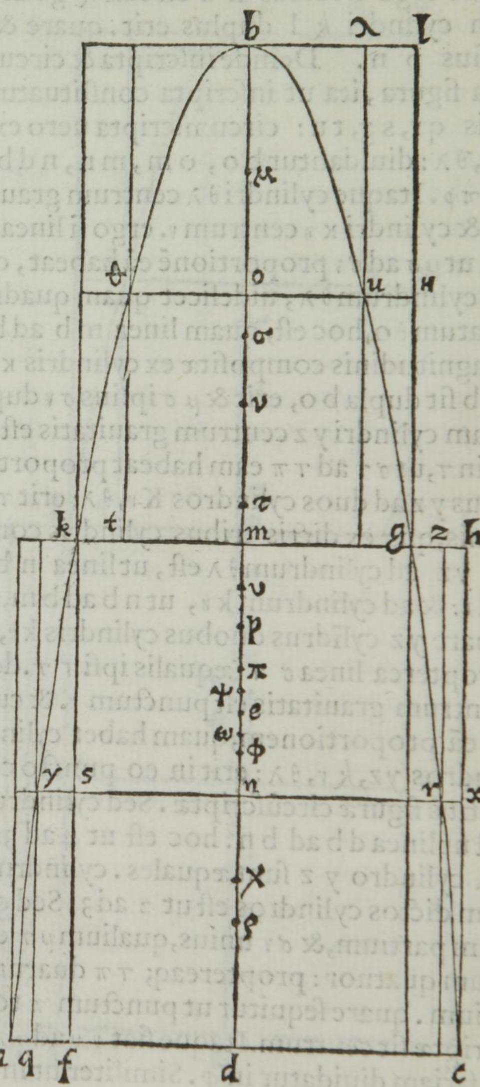
2. duodecimi.



b m. ergo circulus a c circuli k g: & idcirco cylindrus a h cylindri k l duplus erit. quare & linea o p dupla ipsius p n. Deinde inscripta & circumscripta portioni alia figura, ita ut inscripta constituatur ex tribus cylindris q r, s g, t u: circumscripta uero ex quatuor a x, y z, κ ν, θ λ: diuidantur b o, o m, m n, n d bifariam in punctis μ ν π ρ. Itaque cylindri θ λ centrum grauitatis est punctum μ: & cylindri κ ν centrum ν. ergo si linea μ ν diuidatur in σ, ita ut μ σ ad σ ν proportionē eā habeat, quam cylindrus κ ν ad cylindrum θ λ, uidelicet quam quadratum κ m ad quadratum θ o, hoc est, quam linea m b ad b o: erit σ centrum magnitudinis compositæ ex cylindris κ ν, θ λ. & cum linea m b sit dupla b o, erit & μ σ ipsius σ ν dupla. præterea quoniam cylindri y z centrum grauitatis est π, linea σ π ita diuisa in τ, ut σ τ ad τ π eam habeat proportionem, quam cylindrus y z ad duos cylindros κ ν, θ λ: erit τ centrum magnitudinis, quæ ex dictis tribus cylindris constat. cylindrus autē y z ad cylindrum θ λ est, ut linea n b ad b o, hoc est ut 3 ad 1: & ad cylindrum k ν, ut n b ad b m, uidelicet ut 3 ad 2. quare y z cylīdrus duobus cylindris k ν, θ λ æqualis erit. & propterea linea σ π æqualis ipsi τ π. denique cylindri a x centrum grauitatis est punctum ρ. & cum τ ρ diuisa fuerit in eā proportionem, quam habet cylindrus a x ad tres cylindros y z, k ν, θ λ: erit in eo puncto centrum grauitatis totius figuræ circūscriptæ. Sed cylindrus a x ad ipsum y z est ut linea d b ad b n: hoc est ut 4 ad 3: & duo cylindri k ν θ λ cylindro y z sunt æquales. cylindrus igitur a x ad tres iam dictos cylindros est ut 2 ad 3. Sed quoniā μ σ est duarum partium, & σ ν unius, qualium μ π est sex; erit σ π partium quatuor: propterea; τ π duarum, & ν π, hoc est π ρ trium. quare sequitur ut punctum π totius figuræ circumscriptæ sit centrum. Itaque fiat ν υ ad υ π, ut μ σ ad σ ν. & υ ρ bifariam diuidatur in φ. Similiter ut in circumscripta figura ostendetur centrum magnitudinis compositæ ex cylin-

20. primi conicorū

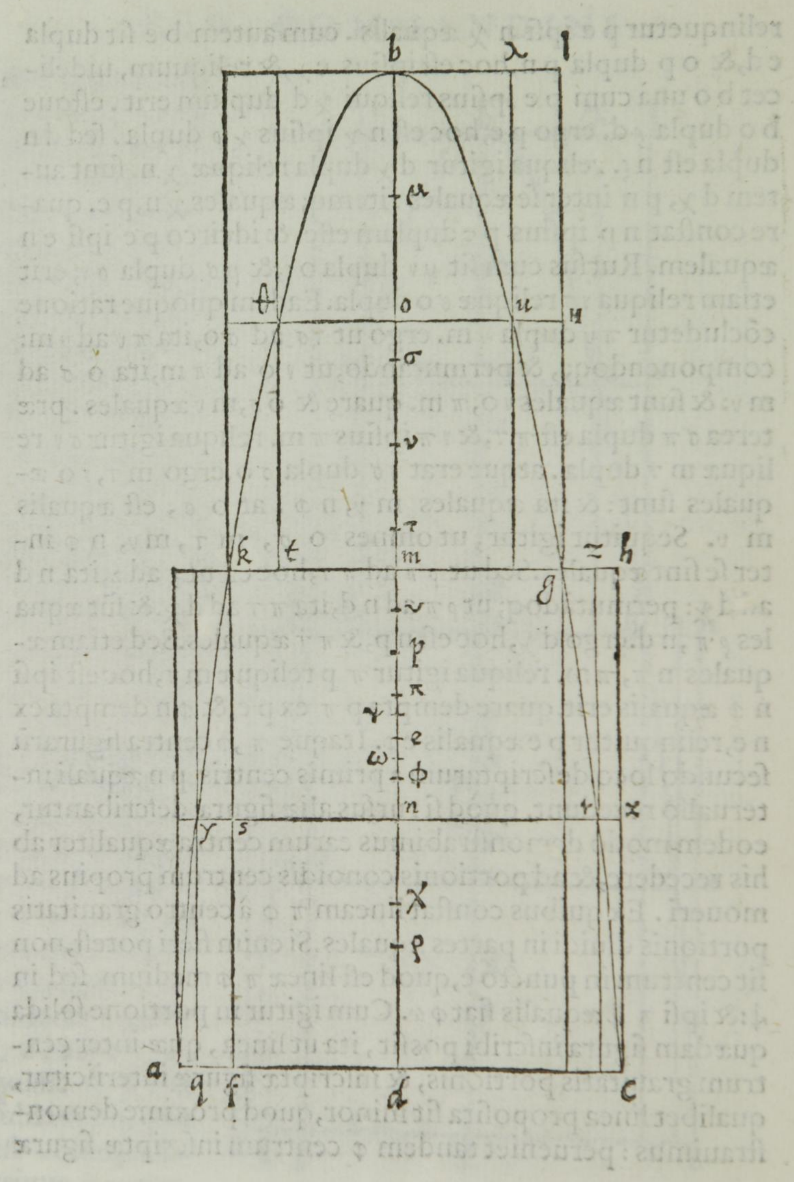
dris s g, t u esse punctum $\upsilon$: & totius figuræ inscriptæ, quæ cõstat ex cylindris q r, ſ g, t u esse $\phi$ centrum. Sunt enim hi cylindri æquales & similes cylindris y z, K $\eta$, $\theta$ $\lambda$, figuræ circumscriptæ. Quoniã igitur ut b e ad e d, ita est o p ad p n; utraq; enim utriusque est dupla: erit componendo, ut b d ad d e, ita o n ad n p; & permutando, ut b d ad o n, ita d e ad n p. Sed b d dupla est o n. ergo & e d ipsius n p dupla erit. quòd si e d bifariam diuidatur ĩ $\chi$, erit $\chi$ d, uel e $\chi$ æqualis n p: & sublata e n, quæ est cõmunis utrique e $\chi$, p n,




relin-

relinquetur p e ipsi n χ æqualis. cum autem b e sit dupla e d, & o p dupla p n, hoc est ipsius e χ, & reliquum, uidelicet b o unà cum p e ipsius reliqui χ d duplum erit. estque b o dupla ρ d. ergo p e, hoc est n χ ipsius χ ρ dupla. sed d n dupla est n ρ. reliqua igitur d χ dupla reliquæ χ n. sunt autem d χ, p n inter se æquales: itemq; æquales χ n, p e. quare constat n p ipsius p e duplam esse. & idcirco p e ipsi e n æqualem. Rursus cum sit μ ν dupla o ν, & μ σ dupla σ ν; erit etiam reliqua ν σ reliquæ σ o dupla. Eadem quoque ratione concludetur π υ dupla υ m. ergo ut ν σ ad σ o, ita π υ ad υ m: componendoq;, & permutando, ut ν o ad π m, ita o σ ad m υ: & sunt æquales ν o, π m. quare & o σ, m υ æquales. præterea σ π dupla est π τ, & ν π ipsius π m. reliqua igitur σ ν reliquæ m τ dupla. atque erat ν σ dupla σ o. ergo m τ, ς o æquales sunt: & ita æquales m υ, n φ. at o σ, est æqualis m υ. Sequitur igitur, ut omnes o σ, m τ, m υ, n φ inter se sint æquales. Sed ut ρ π ad π τ, hoc est ut 3 ad 2, ita n d ad d χ: permutãdoq; ut ρ π ad n d, ita π τ ad d χ. & sũt æquales ρ π, n d. ergo d χ, hoc est n p, & π τ æquales. Sed etiam æquales n π, π m. reliqua igitur π p reliquæ m τ, hoc est ipsi n φ æqualis erit. quare dempta p π ex p e, & φ n dempta ex n e, relinquitur p e æqualis e φ. Itaque π, φ centra figurarũ secundo loco descriptarum a primis centris p n æquali interuallo recedunt. quòd si rursus aliæ figuræ describantur, eodem modo demonstrabimus earum centra æqualiter ab his recedere, & ad portionis conoidis centrum propius ad moueri. Ex quibus constat lineam π φ à centro grauitatis portionis diuidi in partes æquales. Si enim fieri potest, non sit centrum in puncto e, quod est lineæ π φ medium: sed in ↋: & ipsi π ↋ æqualis fiat φ ω. Cum igitur in portione solida quædam figura inscribi possit, ita ut linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & inscriptæ figuræ interiicitur, qualibet linea proposita sit minor, quod proxime demonstrauimus: perueniet tandem φ centrum inscriptæ figuræ

19 quinti



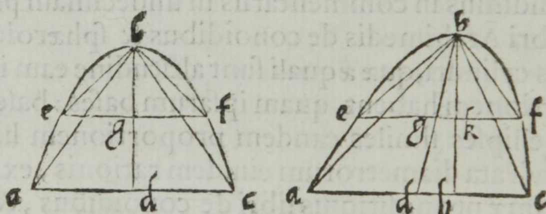
ad punctum ω. Sed quoniam π circumſcripta itidem alia figura æquali interuallo ad portionis centrum accedit, ubi primum φ applicuerit ſe ad ω, & π ad punctũ ψ, hoc eſt ad portionis centrum ſe applicabit. quod fieri nullo modo poſſe perſpicuum eſt. non aliter idem abſurdum ſequetur, ſi ponamus centrum portionis recedere à medio ad partes ω; eſſet enim aliquando centrum figuræ inſcriptæ idem quod portionis centrũ. ergo punctum e centrum erit grauitatis portionis a b c. quod demonſtrare oportebat.

Quod autem ſupra demõſtratum eſt in portione conoidis recta per figuras, quæ ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtant, idem ſimiliter demonſtrabimus per figuras ex cylindri portionibus conſtantes in ea portione, quæ plano non ad axem recto abſcinditur. ut enim tradidimus in commentariis in undecimam propoſitionem libri Archimedis de conoidibus & ſphæroidibus. portiones cylindri, quæ æquali ſunt altitudine eam inter ſe ſe proportionem habent, quam ipſarum baſes: baſes autẽ quæ ſunt ellipſes ſimiles eandem proportionem habere, quam quadrata diametrorum eiuſdem rationis, ex corollario ſeptimæ propoſitionis libri de conoidibus, & ſphæroidibus, manifeſte apparet. corol. 15 de conoidibus & ſphæroidibus.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXX.

Si à portione conoidis rectanguli alia portio abſcindatur, plano baſi æquidiſtante; habebit portio tota ad eam, quæ abſciſſa eſt, duplam proportionem eius, quæ eſt baſis maioris portionis ad baſim minoris, uel quæ axis maioris ad axem minoris.

ABSCINDATVR à portione conoidis rectanguli a b c alia portio e b f, plano basi æquidistante: & eadem portio secetur alio plano per axem; ut superficiei sectio sit parabole a b c: planorũ portiones abscindentium rectæ lineæ a c, e f: axis autem portionis, & sectionis diameter b d; quam linea e f in puncto g secet. Dico portionem conoidis a b c ad portionem e b f duplam proportionem habere eius, quæ est basis a c ad basim e f; uel axis d b ad b g axem. Intelligantur enim duo coni, seu coni portiones a b c, e b f, eãdem basim, quam portiones conoidis, & æqualem habentes altitudinem. & quoniam a b c portio conoidis sesquialtera est coni, seu portionis coni a b c; & portio e b f coni seu portionis coni e b f est sesquialtera, quod de-




monstrauit Archimedes in propositionibus 23, & 24 libri de conoidibus, & sphæroidibus: erit conoidis portio ad conoidis portionem, ut conus ad conum, uel ut coni portio ad coni portionem. Sed conus, uel coni portio a b c ad conum, uel coni portionem e b f compositam proportionem habet ex proportione basis a c ad basim e f, & ex proportione altitudinis coni, uel coni portionis a b c ad altitudinem ipsius e b f, ut nos demonstrauimus in commentariis in undecimam propositionem eiusdem libri Archimedis: altitudo autem ad altitudinem est, ut axis ad axem. quod quidem in conis rectis perspicuum est, in scalenis ue

ro

ro ita demonstrabitur. Ducatur à puncto b ad planum basis a c perpendicularis linea b h, quæ ipsam e f in K secet. erit b h altitudo coni, uel coni portionis a b c: & b K altitudo e f g. Quod cum lineæ a c, e f inter se æquidistent, sunt enim planorum æquidistantium sectiones: habebit d b ad b g proportionem eandem, quam h b ad b K. quare portio conoidis a b c ad portionem e f g proportionem habet compositam ex proportione basis a c ad basim e f; & ex proportione d b axis ad axem b g. Sed circulus, uel ellipsis circa diametrum a c ad circulum, uel ellipsim circa e f, est ut quadratum a c ad quadratum e f; hoc est ut quadratũ a d ad quadratũ e g. & quadratum a d ad quadratum e g est, ut linea d b ad lineam b g. circulus igitur, uel ellipsis circa diametrum a c ad circulũ, uel ellipsim circa e f, hoc est basis ad basim eandem proportionem habet, quã d b axis ad axem b g. ex quibus sequitur portionem a b c ad portionem e b f habere proportionem duplam eius, quæ est basis a c ad basim e f: uel axis d b ad b g axem. quod demonstrandum proponebatur.

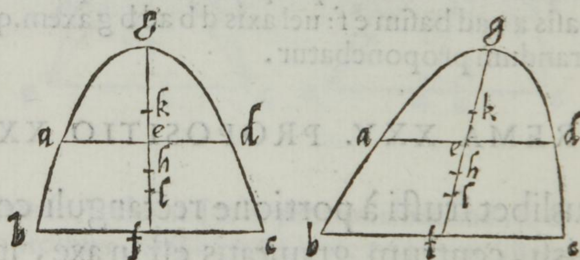
16. undecimi.
4 sexti.
2. duodecimi
7. de conoidibus & sphæroidibus
15. quinti
20. primi conicorũ

## THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXI.

Cuiuslibet frusti à portione rectanguli conoidis abscissi, centrum grauitatis est in axe, ita ut demptis primum à quadrato, quod fit ex diametro maioris basis, tertia ipsius parte, & duabus tertiis quadrati, quod fit ex diametro basis minoris: deinde à tertia parte quadrati maioris basis rursus dempta portione, ad quam reliquum quadrati basis maioris unà cum dicta portione duplã proportionem habeat eius, quæ est quadrati ma-

ioris basis ad quadratum minoris: centrum sit in eo axis puncto, quo ita diuiditur ut pars, quæ minorem basim attingit ad alteram partem eandem proportionem habeat, quam dempto quadrato minoris basis à duabus tertiis quadrati maioris, habet id, quod reliquum est unà cum portione à tertia quadrati maioris parte dempta, ad reliquã eiusdem tertiæ portionem.

SIT frustum à portione rectanguli conoidis abscissum a b c d, cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum b c, minor circa diametrum a d; & axis e f. describatur autem portio conoidis, à quo illud abscissum est, & pla-




no per axem ducto secetur; ut superficiei sectio sit parabole b g c, cuius diameter, & axis portionis g f: deinde g f diuidatur in puncto h, ita ut g h sit dupla h f: & rursus g e in eandem proportionem diuidatur: sitq; g k ipsius k e dupla. Iã ex iis, quæ proxime demonstrauimus, constat centrum grauitatis portionis b g c esse h punctum: & portionis a g c punctum k. sumpto igitur infra h puncto l, ita ut k h ad h l

eam

eam proportionem habeat, quam a b c d fruſtum ad portionem a g d; erit punctum l eius fruſti grauitatis cētrum: habebitq; componendo K l ad l h proportionem eandem, quam portio conoidis b g c ad a g d portionem. Itaq; quo niam quadratum b f ad quadratum a e, hoc eſt quadratum b c ad quadratum a d eſt, ut linea f g ad g e: erunt duæ tertiæ quadrati b c ad duas tertias quadrati a d, ut h g ad g k: & ſi à duabus tertiis quadrati b c demptæ fuerint duæ tertiæ quadrati a d: erit diuidēdo id, quod relinquitur ad duas tertias quadrati a d, ut h k ad k g. Rurſus duæ tertiæ quadra ti a d ad duas tertias quadrati b c ſunt, ut k g ad g h: & duæ tertiæ quadrati b c ad tertiā partē ipſius, ut g h ad h f. ergo ex æquali id, quod relinquitur ex duabus tertiis quadrati b c, demptis ab ipſis quadrati a d duabus tertiis, ad tertiā partem quadrati b c, ut k h ad h f: & ad portionem eiuſdē tertiæ partis, ad quam unà cum ipſa portione, duplam pro portionem habeat eius, quæ eſt quadrati b c ad quadratū a d, ut K l ad l h. habet enim K l ad l h eandem proportionem, quam conoidis portio b g c ad portionem a g d: portio autem b g c ad portionem a g d duplam proportionem habet eius, quæ eſt baſis b c ad baſim a d: hoc eſt quadrati b c ad quadratum a d; ut proxime demonſtratum eſt. quare dempto a d quadrato à duabus tertiis quadrati b c, erit id, quod relinquitur unà cum dicta portione tertiæ partis ad reliquam eiuſdem portionem, ut e l ad l f. Cum igitur centrum grauitatis fruſti a b c d ſit l, à quo axis e f in eam, quā diximus, proportionem diuidatur; conſtat uerū eſſe illud, quod demonſtrandum propoſuimus.

20.1. conà corum.

30 huius

FINIS LIBRI DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

Impreſſ. Bononiæ cum licentia Superiorum.